

Metody výpočtu rozložení změny indexu lomu z interferogramů rotačně symetrických transparentních objektů

Rozložení změny indexu lomu z interferogramů rotačně symetrických transparentních objektů se provádí z Abelovy integrální rovnice nebo z přesného řešení Abelovy integrální rovnice. Dle lit. [3-21] existují čtyři základní přístupy k řešení těchto rovnic, které jsou v dalším textu popsány jako metoda A až D. Jako nejvhodnější se jeví metoda C, která je přesná, přičemž není závislá na počtu vyhodnocovaných bodů ani na jiných parametrech.

Abelova integrální rovnice

$$\Delta S(x) = \frac{2}{\lambda} \int_x^R \Delta n(r) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr. \quad (1)$$

Přesné řešení Abelovy integrální rovnice

$$\Delta n(r) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_r^R \Delta S'(x) \frac{1}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx. \quad (2)$$

Čtyři přístupy k výpočtu změny indexu lomu $\Delta n(r)$

Metoda A - Numerické řešení rovnice (2)

Metoda B - Numerické řešení rovnice (1)

Metoda C - Exaktní řešení rovnice (2)

Metoda D - Exaktní řešení rovnice (1)

METODA A - Numerické řešení rovnice (2)

Před použitím Metody A je vhodné naměřené hodnoty $\Delta S(x)$ vyrovnat a proložit vhodnou funkcí, nejlépe kubickým splinem vyrovnávacím. Dále je třeba rozdělit interval 0 až R , kde R je poloměr nehomogenity, na M bodů sítě. Pro $r_j \neq 0$ lze rovnici (2) přepsat do tvaru

$$\Delta n(r_j) = -\frac{\lambda}{\pi} \Delta S'_{j+0,5} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r_j^2}} - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=j+1}^{i=M-1} \left(\frac{\Delta S'_{i+1}}{\sqrt{r_{i+1}^2 - r_j^2}} + \frac{\Delta S'_i}{\sqrt{r_i^2 - r_j^2}} \right) \frac{r_{i+1} - r_i}{2}$$

a pro $r_j = r_1 = 0$

$$\Delta n(0) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_0^{r_2} \Delta S'(x) \frac{dx}{x} - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=2}^{i=M-1} \left(\frac{\Delta S'_{i+1}}{r_{i+1}} + \frac{\Delta S'_i}{r_i} \right) \frac{r_{i+1} - r_i}{2},$$

kde $j = 1, 2, 3, \dots, M-1$. Průběh $\Delta S'(x)$ v ose objektu (potřebný do integrálu ve druhé rovnici) lze nahradit parabolou.

METODA B - Numerické řešení rovnice (1)

Před použitím Metody B je rovněž vhodné naměřené hodnoty $\Delta S(x)$ vyrovnat a proložit vhodnou funkcí, nejlépe kubickým splinem vyrovnávacím. Dále je třeba rozdělit interval 0 až R , na M bodů sítě. Pro $r_j \neq 0$ lze napsat $M-1$ rovnic ve tvaru rovnice (1)

$$\Delta S(x_j) = \frac{2}{\lambda} \sum_{i=j}^{i=M-1} \Delta n(r_{i+0,5}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x_j^2}},$$

které se řeší Gaussovou eliminační metodou. Index j nabývá hodnot $j = 1, 2, 3, \dots, M-1$. Hodnotu $\Delta n(0)$ v ose objektu je možné určit extrapolací.

METODA C - Exaktní řešení rovnice (2)

Metoda C vyžaduje vyrovnat a proložit naměřené hodnoty $\Delta S(x)$ kubickým splinem vyrovnávacím. Tento splin prokládá v úsecích mezi naměřenými hodnotami vždy polynomy třetího stupně

$$\Delta S(h_i) = a_{i,1} + a_{i,2} \cdot h_i + a_{i,3} \cdot h_i^2 + a_{i,4} \cdot h_i^3$$

kde $i = 1, 2, 3, \dots, m-1, m$ je počet naměřených hodnot $\Delta S(x)$ a h_i je souřadnice transformovaná na daný úsek a platí $h_i = x - x_i$. Derivaci průběhu interferenčního řádu $\Delta S'(x, i)$ pro jednotlivé úseky splinu lze vyjádřit vztahem

$$\Delta S'(x, i) = a_{i,1}^* + a_{i,2}^* \cdot x + a_{i,3}^* \cdot x^2,$$

kde koeficienty a_i^* jsou funkcí y_i a koeficientů a_i . Pro $r \neq 0$ a $r \in (r_j, r_{j+1})$ lze rovnici (2) přepsat do tvaru

$$\Delta n(r) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_r^{r_{j+1}} \Delta S'(x, j) \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=j+1}^{i=m-2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \Delta S'(x, i) \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r_i^2}} - \frac{\lambda}{\pi} \int_{r_{m-1}}^R \Delta S'(x, m-1) \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r_{m-1}^2}}$$

Hodnotu $\Delta n(0)$ v ose objektu je možné určit extrapolací.

METODA D - Exaktní řešení rovnice (1)

Před použitím Metody D je vhodné naměřené hodnoty $\Delta S(x)$ vyrovnat a proložit vhodnou funkcí, nejlépe kubickým splinem vyrovnávacím. Dále se předpokládá funkce $\Delta n(r)$ ve tvaru polynomu k -tého stupně

$$\Delta n(r) = \sum_{i=1}^{i=k+1} a_i \cdot r^{i-1}$$

a ze soustavy $k + 1$ rovnic typu (1)

$$\Delta S(x_j) = \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^{i=k+1} a_i \int_{y_j}^R r^{i-1} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x_j^2}}$$

se počítají koeficienty a_i . V této rovnici nabývá j hodnot $j = 1, 2, 3, \dots, k+1$, kde $k+1$ je též počet bodů odečtených z proložené funkce $\Delta S(x)$.