Trochu matematiky úvodem

Vektorový počet

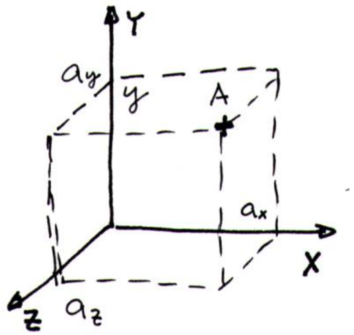
Literatura :
Otakar Brdička; MECHANIKA KONTINUA

Obsah

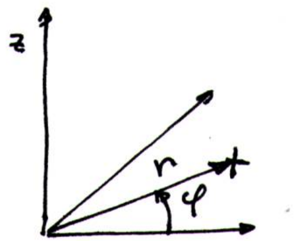
Konec

Prostory a souřadné systémy

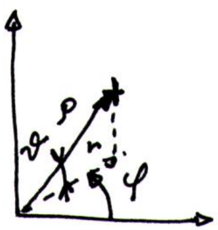
Kartézský souřadný systém



Válcový souřadný systém



Sférický souřadný systém



Obsah

Matematický zápis:

Matematický zápis: *Budeme pracovat s vektorovými veličinami. Pro zápis matematických vztahů budeme využívat:*

Einsteinovu sumační symboliku – *Hlavní způsob zápisu*

Klasický vektorový zápis – *Jen jako doplněk*

$$\sum_{i=1}^{N} a_i b_i = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_i b_i + \ldots + a_N b_N$$

Pokud N=3, pak dostáváme skalární součin dvou vektorů a, b.

Obsah

Matematický zápis:

Pro použití Einsteinovy sumační symboliky je třeba definovat dva tenzory

Kroneckerovo δ - *tenzor druhého řádu*

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{array}{l} = 1 \text{ pokud } i = j \\ = 0 \text{ pokud } i \neq j \end{array} \right.$$

Levicivitův teznor $\boldsymbol{\varepsilon_{ijk}}$ **-***tenzor třetího řádu*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{array}{ll} 1 & \text{pro sudou permutaci indexů: 123, 231, 312} \\ -1 & \text{pro lichou permutaci indexů: 321, 213, 132} \\ 0 & \text{pokud jsou některé indexy stejné} \end{array}$$

Matematický zápis:

Pro klasický vektorový zápis je třeba definovat novou matematickou veličinu vektor **nabla ∇**

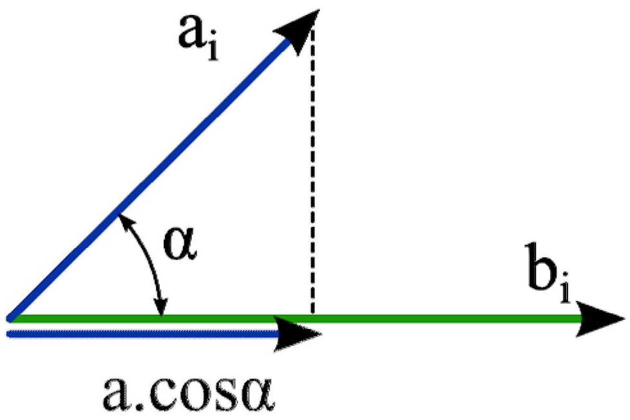
$$\boldsymbol{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x};\quad \frac{\partial}{\partial y};\quad \frac{\partial}{\partial z}\right]$$

Obsah

Příklady zápisu vektorových operací

Skalární součin dvou vektorů

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a.b.\cos\alpha = a_i b_i$$



Obsah

Příklady zápisu vektorových operací

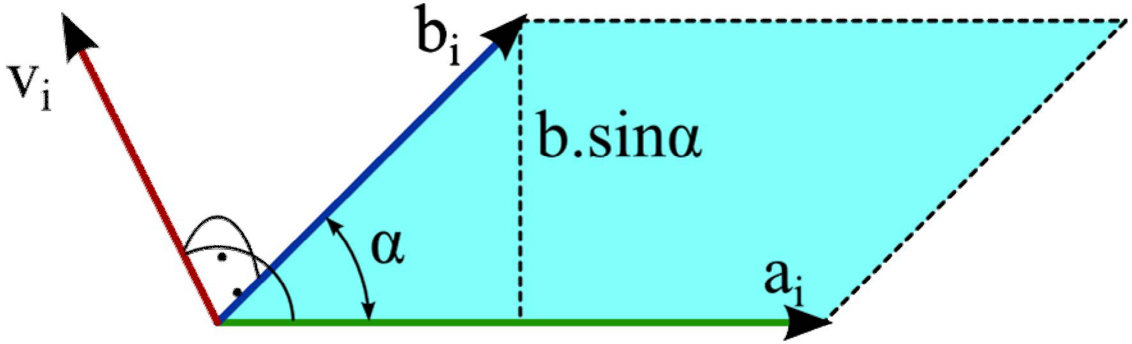
Vektorový součin dvou vektorů

Klasika	**ESS**
$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$	$v_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

Složky vektoru ***v***

$v_x = a_y b_z - a_z b_y$	$v_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$
$v_y = a_z b_x - a_x b_z$	$v_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$
$v_z = a_x b_y - a_y b_x$	$v_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$v = a.b.\sin\alpha$$

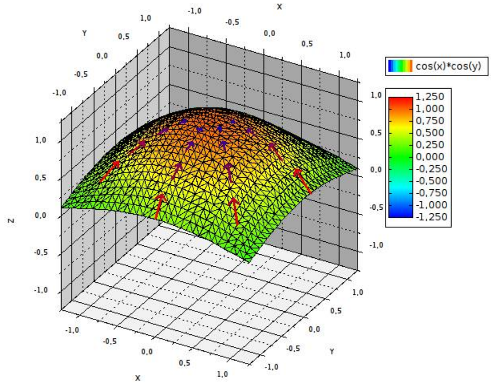


Obsah

Příklady zápisu operátorů - gradient

Gradient skalární funkce vyjadřuje směr největší změny této funkce.

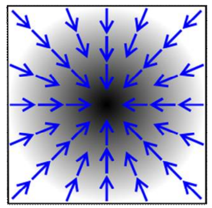
Klasický zápis

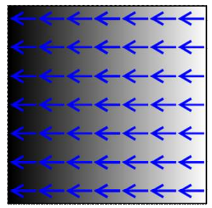


$$\vec{v} = grad(a) = \vec{i}\,\frac{\partial a}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial a}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial a}{\partial z}$$

Zápis pomocí symbolu nabla.

$$\vec{v} = \nabla a = \left[\frac{\partial a}{\partial x};\frac{\partial a}{\partial y};\frac{\partial a}{\partial z}\right] = \vec{i}\,\frac{\partial a}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial a}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial a}{\partial z}$$





Zápis pomocí Einsteinovy sumační symboliky

$$v_i = \frac{\partial a}{\partial x_i}$$

$$v_1 = \frac{\partial a}{\partial x_1} \qquad v_2 = \frac{\partial a}{\partial x_2} \qquad v_3 = \frac{\partial a}{\partial x_3}$$

Operátor grad můžeme aplikovat i na vektory, či tenzory libovolného řádu

Obsah

Příklady zápisu operátorů - divergence

Divergence udává **zřídlovost** vektorového pole

Klasický zápis

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Zápis pomocí vektoru nabla.
Divergence se dá vyjádřit jako skalární součin vektoru nabla a vektoru **a**.

$$div\vec{a} = \nabla.\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}.a_x + \frac{\partial}{\partial y}.a_y + \frac{\partial}{\partial z}.a_z \right)$$

Zápis pomocí Einsteinovy sumační symboliky

$$\left(div\vec{a}\right)_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

Vektorové pole **b**, pro které je divergence nulová nazýváme nezřídlové pole.

Příklady zápisu operátorů - rotor

Klasický vektorový zápis

$$\vec{v} = rot\left(\vec{a}\right)$$

$$v_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \qquad v_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \qquad v_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

Zápis pomocí vektoru nabla

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{a}$$

Zápis pomocí Einsteinovy sumační symboliky

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

$$v_1 = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \qquad v_2 = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \qquad v_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}$$

Vektorové pole **b,** pro které platí, že rot**b** = 0 se nazývá potenciální.

Matematický úvod – potenciál vektorového pole

Máme vektorové pole dané vektorovou funkcí:

$$\vec{b} = \vec{f}(\vec{r}) \qquad \textit{Kde:} \qquad \vec{r} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)$$

$$b_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$b_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$b_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

Pokud je vektorové pole nevířivé tedy rot(**b**)=0, pak existuje potenciál $B(x_1,x_2,x_3)$ vektoru **b.** Potenciál B je skalární funkce a platí pro ní:

$$\vec{b} = \mathrm{grad}(B)$$

$$b_i = \frac{\partial B}{\partial x_i}$$

$$b_1 = \frac{\partial B}{\partial x_1} \qquad b_2 = \frac{\partial B}{\partial x_2} \qquad b_3 = \frac{\partial B}{\partial x_3}$$

Matematický úvod – Gaus-Ostrogradského věta

Gaus-Ostrogradského věta vyjadřuje vztah mezi objemovým integrálem a plošným integrálem.

Tuto matematickou větu je možné nejlépe vyjádřit pomocí Einsteinovy sumační symboliky.

$$\int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} . dV = \int_S v_i . n_j . dS$$

V – objem, přes který integrujeme.

S – hraniční plocha objemu V.

n_j – vnější jednotkový normálový vektor k hraniční ploše S.

Matematický úvod – tenzory

Tenzor je obecný název pro matematické veličiny

Skalár je tenzor **nultého** stupně (to je dáno smluvně)

$$a$$

1 složka

Vektor je tenzor **prvního** stupně

$$\vec{a} = \left[a_x, \quad a_y, \quad a_z \right] \qquad a_i = \left[a_1, \quad a_2, \quad a_3 \right]$$

3 složky

Čtvercová matice je tenzor **druhého** stupně

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Počet složek
(prvků) je 9

Matematický úvod – tenzory

Tenzor třetího stupně (27 – složek, prvků)

$$\begin{bmatrix} a_{311} & a_{312} & a_{313} \\ & & a_{323} \\ & & a_{333} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} \\ & & a_{223} \\ & & a_{233} \end{bmatrix}$$

$$a_{ijk} = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} \end{bmatrix}$$

Obsah

Matematický úvod – speciální tenzory

Symetrický tenzor

$$S_{ij} = S_{ji}$$

Má 9 složek z toho jen 6 je nezávislých

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix}$$

Antisymetrický tenzor

$$A_{ij} = -A_{ji}$$

Má 9 složek z toho jen 3 jsou nezávislé

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Matematický úvod – speciální tenzory

Každý tenzor je možné rozložit na **symetrický** a **antisymetrický** tenzor.

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ij}\right)$$

Můžeme přičíst nulu.

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ij}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ji} - T_{ji}\right)$$

Lehce to přeházíme

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$$

První část je symetrický tenzor.

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right)$$

Druhá část je antisymetrický tenzor

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$$

Matematický úvod – speciální tenzory

Diáda je speciální tenzor který vznikne ze dvou vektorů.

$$d_{ij} = a_i . b_j$$

Tento tenzor je speciální tím, že má pouze šest nezávislých složek.

Obecný tenzor druhého řádu je možné vyjádřit jako součet tří diád.

Matematický úvod – operace s tenzory

Úžení tenzoru je to operace při, které budeme sčítat přes dva indexy daného tenzoru. Po této operaci se stupeň tenzoru sníží o dva.

Ukážeme si to na speicálním tenzoru šestého stupně, který vznikne vynásobením dvou Levi-Civitových tenzorů.

$$\varepsilon_{ijk}.\varepsilon_{lmn}$$

Matematici nám zjistili, že tento tenzor můžeme také vyjádřit pomocí determinantu matice třetího stupně, jejíž prvky jsou vyjádřeny pomocí Kroneckerova delta

$$\varepsilon_{ijk}.\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijk}.\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}.\delta_{jm}.\delta_{kn} + \delta_{im}.\delta_{jn}.\delta_{kl} + \delta_{in}.\delta_{jl}.\delta_{km} -$$
$$- \delta_{in}.\delta_{jm}.\delta_{kl} - \delta_{im}.\delta_{jl}.\delta_{kn} - \delta_{il}.\delta_{jn}.\delta_{km}$$

Matematický úvod – operace s tenzory

Následující operace budeme využívat při pozdějších odvozeních

Provedeme úžení předchozího tenzoru podle indexů k,n. Položíme tedy k=n

$$\varepsilon_{ijn}.\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}.\delta_{jm}.\delta_{nn} + \delta_{im}.\delta_{jn}.\delta_{nl} + \delta_{in}.\delta_{jl}.\delta_{nm} -$$

$$-\delta_{in}.\delta_{jm}.\delta_{nl} - \delta_{im}.\delta_{jl}.\delta_{nn} - \delta_{il}.\delta_{jn}.\delta_{nm}$$

Nyní je třeba si uvědomit následující relace:

$$\delta_{nn} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\delta_{jn}.\delta_{nl} = \delta_{j1}.\delta_{1l} + \delta_{j2}.\delta_{2l} + \delta_{j3}.\delta_{3l}$$

Pokud je j=l pak dostaneme 1,
Pokud je j různé od l pak dostaneme 0.
Můžeme tedy psát

$$\delta_{jn}.\delta_{nl} = \delta_{jl}$$

$$\varepsilon_{ijn}.\varepsilon_{lmn} = 3.\delta_{il}.\delta_{jm} + \delta_{im}.\delta_{jl} + \delta_{im}.\delta_{jl} - \delta_{il}.\delta_{jm} - 3.\delta_{im}.\delta_{jl} - \delta_{il}.\delta_{jm}$$

$$\varepsilon_{ijn}.\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}.\delta_{jm} - \delta_{im}.\delta_{jl}$$

Matematický úvod – operace s tenzory

Můžeme provádět další operaci úžení.

$$\varepsilon_{ijn}.\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}.\delta_{jm} - \delta_{im}.\delta_{jl}$$

Tentokrát položíme j=m

$$\varepsilon_{imn}.\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}.\delta_{mm} - \delta_{im}.\delta_{ml}$$

Opět využijeme následujících relací.

$$\delta_{mm} = 3 \qquad \delta_{im}.\delta_{ml} = \delta_{il}$$

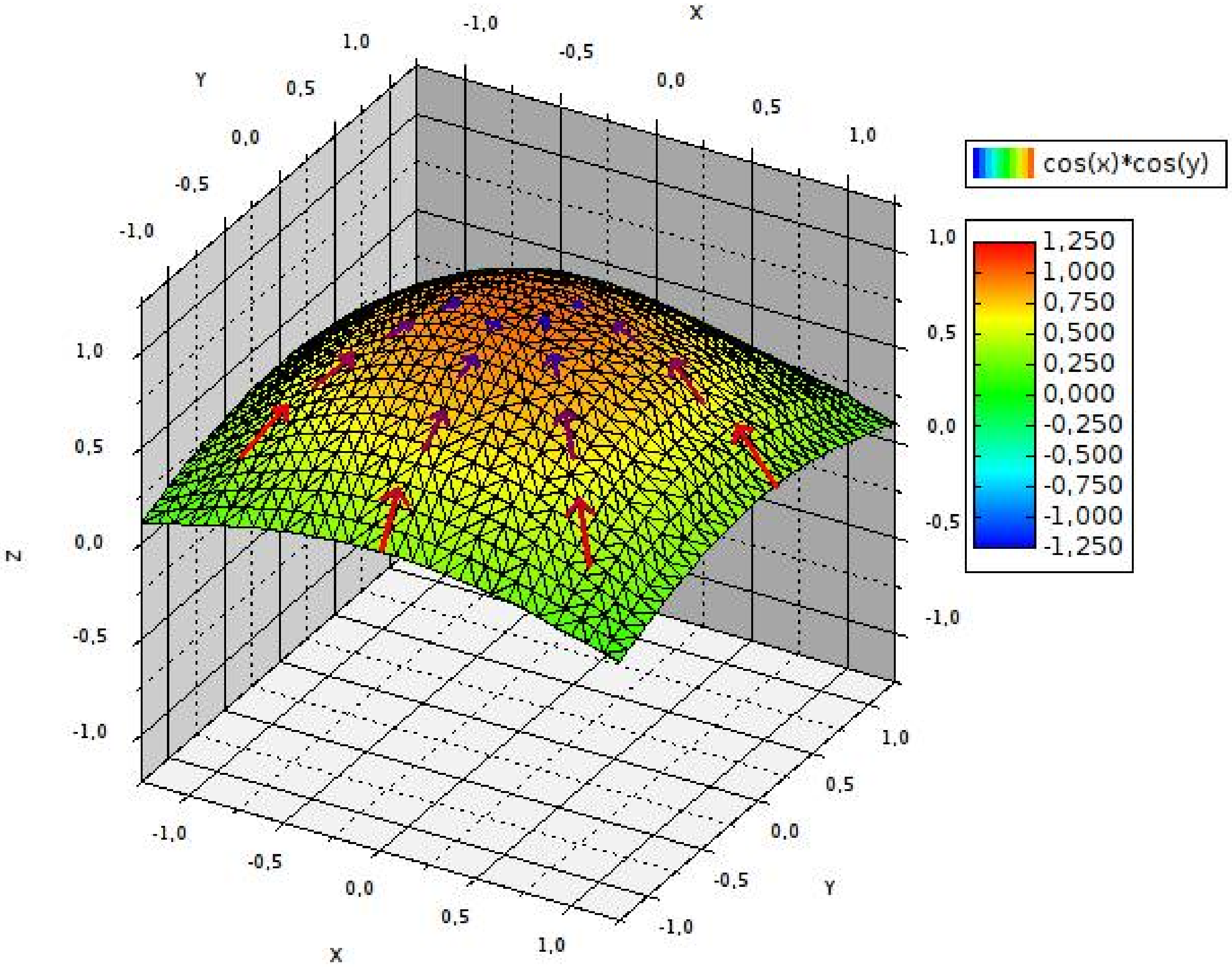
$$\varepsilon_{imn}.\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}.3 - \delta_{il} = 2.\delta_{il}$$

A na konec můžeme úžit ještě jednou (i=l) a dostaneme skalár

$$\varepsilon_{lmn}.\varepsilon_{lmn} = 2.\delta_{ll} = 6$$

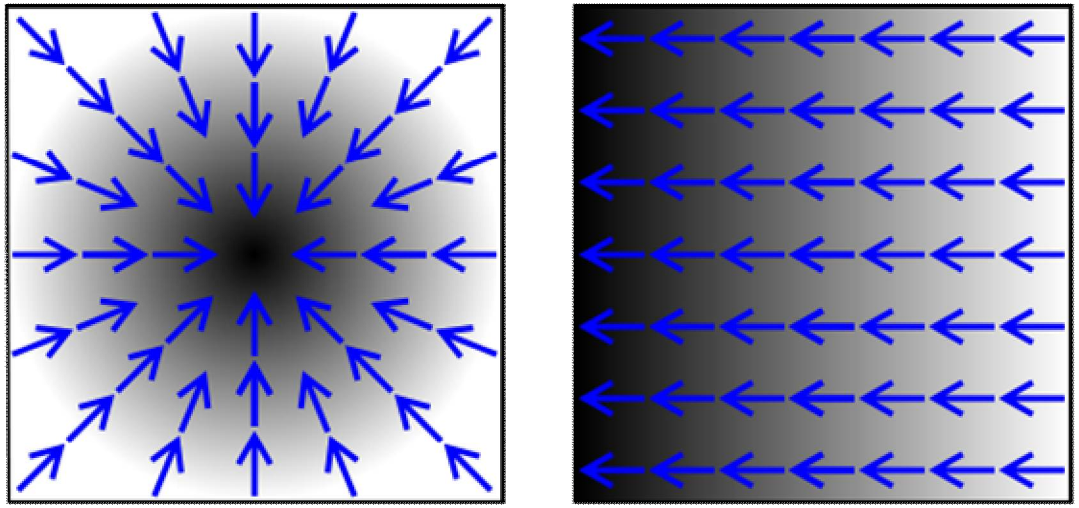
Obsah

Gradient



•„Gradient vectors on cos(x)*cos(y)“ od Petr Kopač – Vlastní dílo. Licencováno pod CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gradient_vectors_on_cos(x)*cos(y).png#mediaviewer/File:Gradient_vectors_on_cos(x)*cos(y).png

Gradient



•„Gradient2“ od see file history – Vlastní dílo. Licencováno pod CC BY-SA 2.5 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gradient2.svg#mediaviewer/File:Gradient2.svg

Obsah