Vybrané pojmy týkající se pohybu kapalin

Literatura :
Otakar Brdička; MECHANIKA KONTINUA

Obsah

Úvod:

Čím se v mechanice tekutin zabýváme?

Vlastnosti kapalin.

Metody popisu kontinua:

Lagrangeův popis kontinua.
Ten již v podstatě znáte. Jde o to sledovat částici kapaliny – její dráhu a chování v čase.

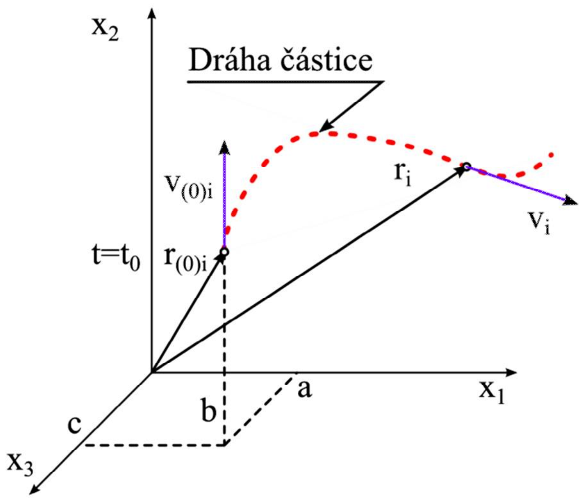
Eulerův popis kontinua.
Moc ho nezajímá pohyb částice. Spíše je zaměřen na oblast proudění jako na pole nějakých veličin a to bud skalárních nebo vektorových (rychlost, tlak, atd.)

Příklady - formule 1
- piliny

Metody popisu kontinua: Lagrangeův popis kontinua

V čase t=t_0 vybereme konkrétní částici a budeme sledovat její polohu v čase. Poloha je funkcí času a toho, kterou částici jsme vybrali.

$$r_i = f_i(a,b,c,t)$$



Pro konkrétní částici platí okrajová podmínka

V čase $t = t_0$

Platí: $r_i = r_{(0)i}$ Kde: $r_{(0)i} = (a, \quad b, \quad c)$

Při dalším sledování této částice v čase jsou již Lagrangeovy souřadnice a, b, c, konstantní.
Po vybrání konkrétní částice je již trajektorie **pouze funkcí času t**.

Rychlost **částice** určíme derivací funkce polohy podle času. Zrychlení **částice** určíme druhou derivací funkce polohy podle času.

$$v_i = \frac{dr_i}{dt} \qquad a_i = \frac{d^2 r_i}{dt^2}$$

Obsah

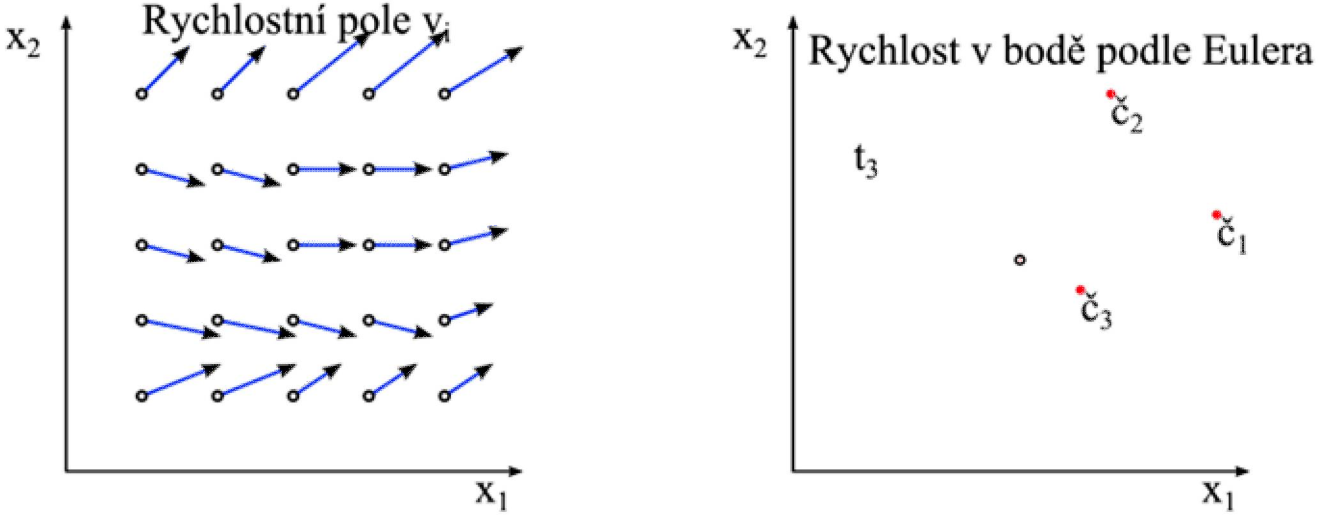
Metody popisu kontinua: Eulerův popis kontinua

V tomto případě nejde o trajektorii částice. Jde o to sledovat rozložení dané veličiny (rychlost, tlak, hustota atd.) v oblasti, která je předmětem našeho zájmu.

$$v_i = v_i(r_j, t)$$

$$p = p(r_j, t)$$

Sledujeme danou veličinu jako pole, nepřiřazujeme ji konkrétní částici.



U tohoto případu popisu kontinua máme problém s určením zrychlení **částice**. Respektive s určením časové změny jakékoli veličiny svázané s danou **částicí**.

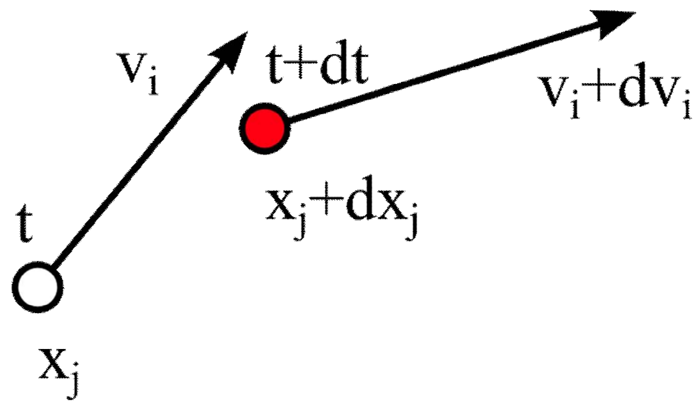
Obsah

Metody popisu kontinua: Eulerův popis kontinua

Pokud budeme chtít sestavovat pohybovou rovnici budeme chtít znát zrychlení částice a to je u Eulerovy metody popisu kontinua problém.

Je to dáno tím, že nesledujeme pohyb konkrétní částice, proto je rychlost funkcí **polohy** a **času**.

$$v_i = v_i(x_j, t)$$



Rychlost částice v čase t+dt můžeme určit pomocí Taylorova rozvoje z bodu x_j.

$$v_i(x_j + dx_j, t + dt) = v_i(x_j, t) + \frac{\partial v_i(x_j, t)}{\partial x_j}.dx_j + \frac{\partial v_i(x_j, t)}{\partial t}.dt$$

Předchozí vztah vyjadřuje rychlost částice v čase t+dt. Tento vztah platí pro malé dt, pokud je dt malé pak je malé i dx_j. Na základě tohoto předpisu pak můžeme určit zrychlení částice.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{v_i(x_j + dx_j, t + dt) - v_i(x_j, t)}{dt}$$

Obsah

Metody popisu kontinua: Eulerův popis kontinua

Do vztahu pro zrychlení částice dosadíme z Taylorova rozvoje.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\cancel{v_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt - \cancel{v_i}}{dt}$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \frac{Dv_i}{Dt}$$

Předchozí vztah vyjadřuje změnu rychlosti částice na při použití Eulerova popisu kontinua. Tento předpis se dá zobecnit pro časovou změnu jakékoli veličiny, která je vázaná na částici. Nazýváme ji tzv **substancionální** derivací, **materiálovou** derivací či **úplnou** derivací podle času.

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \boxed{\frac{\partial v_i}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j} \qquad \frac{DA}{Dt} = \boxed{\frac{\partial A}{\partial t}} + \boxed{\frac{\partial A}{\partial x_j} v_j}$$

První člen vyjadřuje tzv. **lokální změnu** a druhý tzv. **konvektivní změnu** dané veličiny.

V případě substancionální derivace rychlosti jde o **lokální** zrychlení a **konvektivní** zrychlení.

Obsah

Metody popisu kontinua: Eulerův popis kontinua

Substancionální – materiálová derivace.

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_j} v_j$$

Ta je velkým problémem Eulerovy metody popisu kontinua.
Proč?

Nelineární člen.

Problém u Bernoulliho rovnice – kvůli ní musíme integrovat po proudnici a ne po libovolné křivce

Díky ní se v Reynoldsově rovnici vyskytují Reynoldsova napětí a musíme tedy díky tomu zavádět modely turbulence.

Metody popisu kontinua: Přechod Lagrange→Euler

Podle Lagrange je pohyb konkrétní částice popsán rovnicemi

$$x_i = x_i(a,b,c,t)$$

Rychlost:

$$v_i = \frac{dx_i(a,b,c,t)}{dt} = v_i(a,b,c,t)$$

a, b, c jsou parametry, které můžeme vyjádřit z rovnice pro trajektorii. (V případě, že rovnice jsou vzájemně jednoznačné. Máme tři rovnice o třech neznámých a, b, c. Vyjádříme je a dosadíme do rovnice pro rychlost a tak jsme přešli k Eulerovu popisu kontinua.

Metody popisu kontinua: Přechod Euler → Lagrange

Máme rychlost uvedenou v Eulerových souřadnicích.

$$v_i = v_i(x_j, t)$$

Pro rychlost částice musí platit

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_j, t)$$

$$dx_i = v_i(x_j, t).dt$$

Jedná se o tři diferenciální rovnice. Z nich vyjádříme x_i. Při integraci pak musíme zjistit tři integrační konstanty C_1, C_2 a C_3. Tyto tři integrační konstanty určíme na základě toho, že v čase $t=t_0$ známe polohu částice. Tím pádem však jsou tyto integrační konstanty vlastně Lagrangeovy proměnné a, b, c.

Základní pojmy: Trajektorie částice

Lagrangeův popis kontinua.

V tomto případě jsou trajektorie základem této metody popisu kontinua a z nich musíme vše odvozovat.

$$x_i = x_i(a, b, c, t)$$

Eulerův popis kontinua.

Tady musíme trajektorie určit, ve většině případů numericky z následujících vztahů.

$$x_i = \int_0^t v_i(x_j, t).dt$$

Časový interval <0,t> můžeme rozdělit na velmi krátké časové úseky. Předpokládáme, že v tomto časovém úseku bude rychlost konstantní. Novou polohu částice, za krátký časový úsek Δt, tedy můžeme vypočítat následujícím způsobem

$$x_{(t+\Delta t)i} = x_{(t)i} + v_{(t)i}(x_j, t).\Delta t$$

Základní pojmy: Proudnice

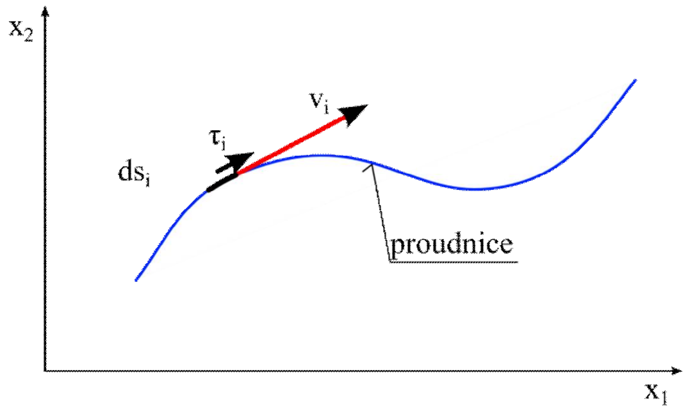
Proudnice je **myšlená křivka**, ke které jsou rychlosti tečné.
Pojem proudnice je úzce spjat s Eulerovým popisem kontinua.

v_i Vektor rychlosti

$ds_i = \tau_i . ds$ Vektor vyjadřující element proudnice

τ_i Jednotkový tečný vektor k proudnici

ds Velikost elementu proudnice



Jak můžeme vyjádřit, že vektor ds_i a v_i leží na společné nositelce?

$$\varepsilon_{ijk} . v_j . ds_k = 0$$

Předchozí rovnici je možné také vyjádřit následujícím způsobem

$$\frac{ds_1}{v_1} = \frac{ds_2}{v_2} = \frac{ds_3}{v_3} = konst$$

Pouze v případě **ustáleného proudění** jsou proudnice a trajektorie **shodné** křivky.

Obsah

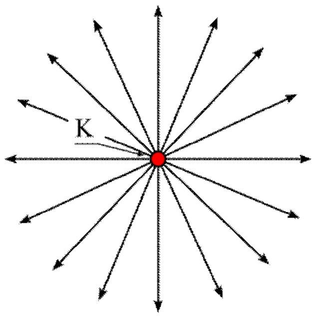
Základní pojmy: Kritický bod

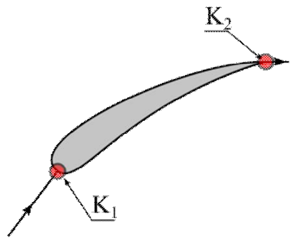
Kritický bod je místo, v proudové oblasti, kde je rychlost nulová.

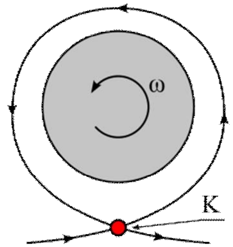
$$v_i = 0$$

V kritickém bodě, či v jeho blízkosti mohou mít proudnice následující tvary

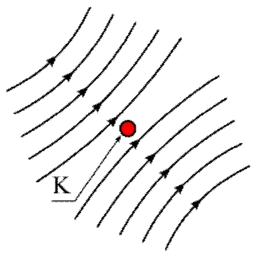
Proudnice se mohou v kritickém bodě křížit

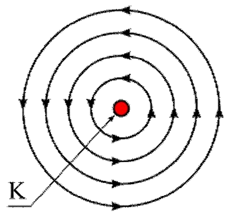






Proudnice se mohou ke kritickému bodu blížit





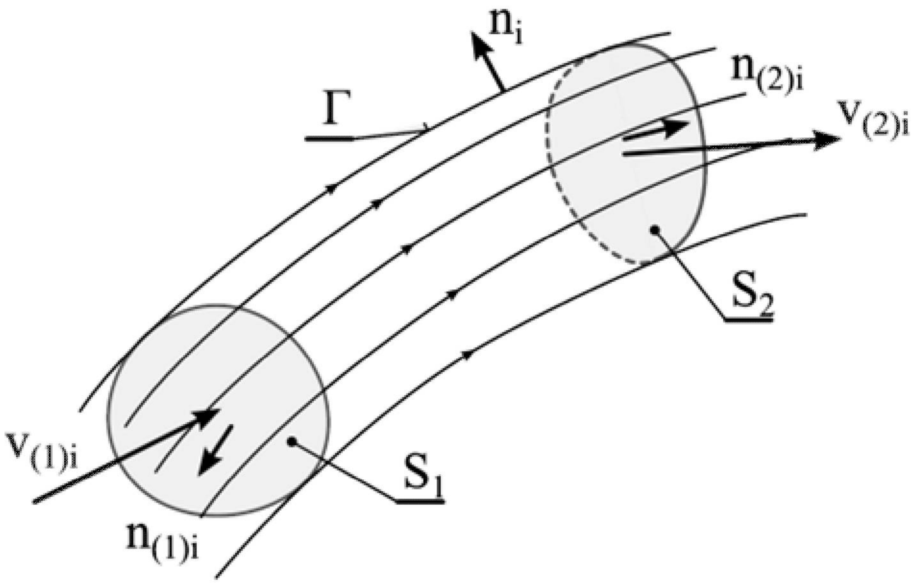
Obsah

Základní pojmy: Proudová trubice

Proudová trubice je tvořena **proudnicemi**, které procházejí uzavřenou křivkou, která **není** proudnicí.

Průtok uzavřenou plochou elementu proudové trubice můžeme vyjádřit následujícím způsobem.

$$\int_{S=S_1+S_2+\Gamma} v_i.n_i.dS = Q$$



Pro nestlačitelnou kapalinu platí

$$\int_{S=S_1+S_2+\Gamma} v_i.n_i.dS = 0$$

$$\int_{S_1} v_i.n_i.dS + \int_{S_2} v_i.n_i.dS + \cancel{\int_{\Gamma} v_i.n_i.dS} = 0$$

$$v_{(1)i}.n_{(1)i}.S_{(1)} + v_{(2)i}.n_{(2)i}.S_{(2)} = 0$$

$$-v_{(n1)}.S_{(1)} + v_{(n2)}S_{(2)} = 0 \qquad v_{(n1)}.S_{(1)} = v_{(n2)}S_{(2)}$$

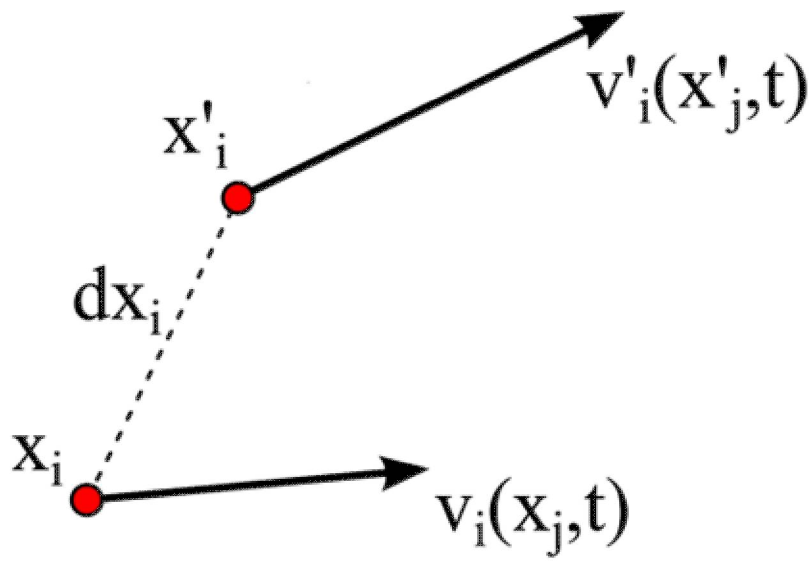
Obsah

Základní pojmy: Rozklad pohybu dvou částic

Při řešení pohybu částic kapaliny je třeba si všímat ne jen jedné částice, ale dvou částic.

Máme dva blízké body x_i a x'_i. Rychlost v bodě x'_i můžeme potom vyjádřit pomocí rychlosti v bodě x_i s využitím Taylorova rozvoje.

$$v'_i = v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\left(x'_j - x_j\right)$$



Ve vztahu je tenzor druhého řádu v_{ij}.

$$v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dot{e}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}$$

Ten můžeme rozložit na symetrickou a antisymetrickou část – viz matematický úvod

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Základní pojmy: Rozklad pohybu dvou částic

Takže rychlost v'_i můžeme vyjádřit

Podle tohoto rozkladu můžeme rychlost pohybu částice rozložit na tři složky

$$v'_i = v_i + \dot{e}_{ij}.\left(x'_j - x_j\right) + \dot{\omega}_{ij}.\left(x'_j - x_j\right)$$

Rychlost **translace**

Rychlost **deformace**

Rychlost **rotace**

Se symetrickým tenzorem rychlosti deformace $\mathbf{e}_{ij}$ už nemůžeme dělat nic.

Antisymetrický tenzor $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ můžeme ještě upravit.

Základní pojmy: Rozklad pohybu dvou částic

Antisymetrický tenzor $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ můžeme ještě upravit.

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & 0 & -\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \\ -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Tento tenzor má pouze 3 nezávislé složky, to znamená, že bychom se mohli pokusit vyjádřit ho pomocí vektoru ω_i , ten má také jen tři složky.

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \qquad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2}.\varepsilon_{ijk}.\dot{\omega}_{jk} = \frac{1}{2}.\varepsilon_{ijk}.\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Důkaz

$$\dot{\omega}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}.\omega_k \quad \Longrightarrow \quad \dot{\omega}_{ik} = \varepsilon_{ijk}.\omega_j$$

Obsah

Základní pojmy: Rozklad pohybu dvou částic

$$\omega_i = -\frac{1}{2}.\varepsilon_{ijk}.\dot{\omega}_{jk}$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2}.\varepsilon_{jki}.\dot{\omega}_{jk} \qquad / .\varepsilon_{nki}$$

$$\varepsilon_{nki}.\omega_i = -\frac{1}{2}.\varepsilon_{nki}.\varepsilon_{jki}.\dot{\omega}_{jk} \qquad \varepsilon_{nki}.\varepsilon_{jki} = 2.\delta_{nj}$$

$$\varepsilon_{nki}.\omega_i = -\frac{1}{2}.2.\delta_{nj}.\dot{\omega}_{jk}$$

$$-\dot{\omega}_{nk} = \varepsilon_{nki}.\omega_i$$ Zaměníme indexy

$$\dot{\omega}_{ij} = -\varepsilon_{ijk}.\omega_k$$

$$\dot{\omega}_{ik} = \varepsilon_{ijk}.\omega_j$$

Základní pojmy: Vektor víru rychlosti Ω_i

Vektor víru rychlosti je definovaný operátorem rotor, který budeme aplikovat na pole rychlostí.

$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} : \qquad \Omega_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}; \qquad \Omega_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}; \qquad \Omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2};$$

Když to zkontrolujeme s dříve zmíněným vektorem, který jsme nahradili tenzor rychlosti rotace, tak zjistíme, že tento vektor je poloviční vůči vektoru víru rychlosti Ω_i.

$$\Omega_i = 2.\omega_i$$

Vektor ω_i nazýváme vektorem úhlové rychlosti.

Pole vektoru víru rychlosti je polem nezřídlovým. To znamená, že pokud budeme na vektor víru rychlosti aplikovat divergenci pak musíme dostat nulu

$$div\Omega_i = 0$$

Důkaz

Obsah

Základní pojmy: Vektor víru rychlosti

$$div\Omega_i = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_3}$$

$$div\Omega_i = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)$$

$$div\Omega_i = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 . \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 . \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 . \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 . \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$div\Omega_i = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 . \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 . \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 . \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 . \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_3}$$

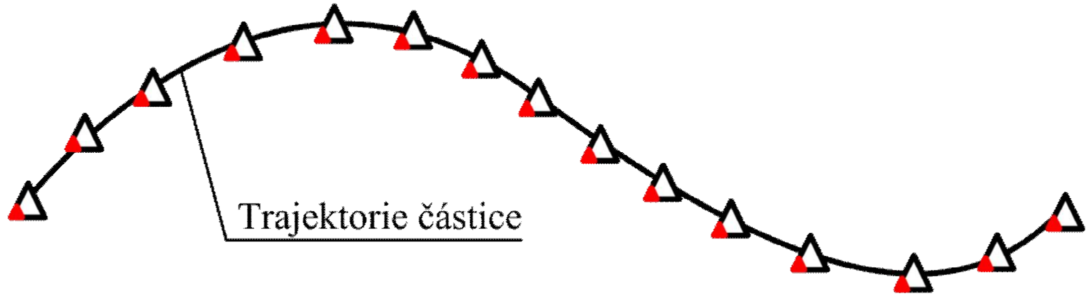
$$div\Omega_i = 0$$

Základní pojmy: Vektor víru rychlosti Ω_i

Podle vektoru víru rychlosti můžeme dělit proudění na dva typy

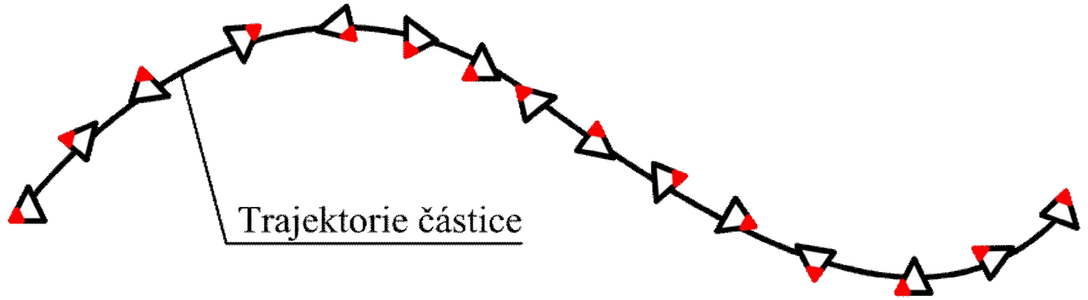
1. Nevířivé proudění – potenciální proudění (Existuje potenciál rychlosti Φ)

$$\Omega_i = 0$$



2. Vířivé proudění

$$\Omega_i \neq 0$$

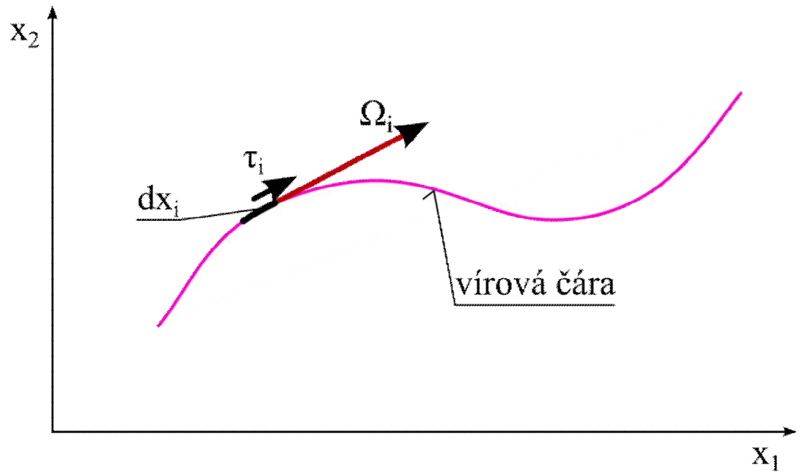


Obsah

Základní pojmy: Vírová čára

Vírová čára je **myšlená křivka**, ke které jsou vektory víru rychlosti tečné.

Ω_i	Vektor víru rychlosti
$dx_i = \tau_i . dL$	Vektor vyjadřující element vír. čáry
τ_i	Jednotkový tečný vektor k vírové čáře
dL	Velikost elementu vírové čáry



Podobně jako u proudnice vyjádříme, že vektor dx_i a Ω_i leží na společné nositelce.

$$\varepsilon_{ijk} . \Omega_j . dx_k = 0$$

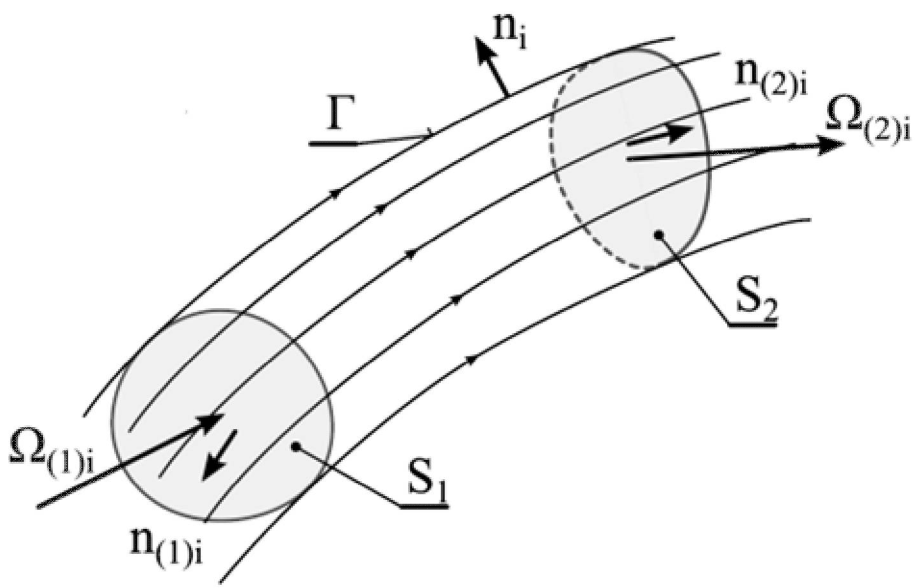
Předchozí rovnici je možné také vyjádřit následujícím způsobem

$$\frac{dx_1}{\Omega_1} = \frac{dx_2}{\Omega_2} = \frac{dx_3}{\Omega_3} = konst$$

Základní pojmy: Intenzita víru – vírová trubice

Vírová trubice je podobně jako proudnice tvořena **vírovými čarami**, které procházejí uzavřenou křivkou, která sama **není** vírovou čárou.

Tok vektoru víru rychlosti uzavřenou plochou elementu vírové trubice můžeme vyjádřit následujícím způsobem.



$$\int\limits_{S=S_1+S_2+\Gamma} \Omega_i . n_i . dS = 0$$

$$\int\limits_{S_1} \Omega_i . n_i . dS + \int\limits_{S_2} \Omega_i . n_i . dS + \cancel{\int\limits_{\Gamma} \Omega_i . n_i . dS} = 0$$

$$\Omega_{(1)i} . n_{(1)i} . S_{(1)} + \Omega_{(2)i} . n_{(2)i} . S_{(2)} = 0$$

$$-\Omega_{(n1)} . S_{(1)} + \Omega_{(n2)} S_{(2)} = 0$$

$$\Omega_{(n1)} . S_{(1)} = \Omega_{(n2)} S_{(2)}$$

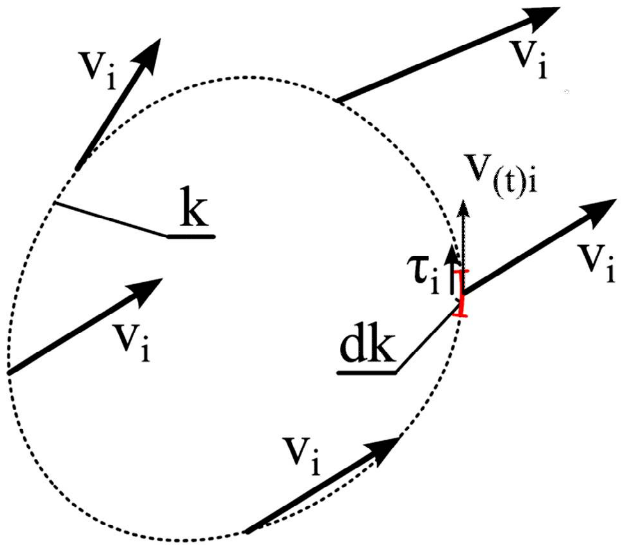
$$\mu_{(1)} = \Omega_{(n1)} . S_{(1)} = \Omega_{(n2)} S_{(2)} = \mu_{(2)}$$

Veličina μ se nazývá intenzita víru. Ta se podél vírové trubice **nemění**. To znamená, že vírová trubice je buď nekonečná, uzavřená nebo se dotýká hranice oblasti. Tento závěr se nazývá **druhou Helmholtzovou větou** o prostorovém zachování víru.

Obsah

Základní pojmy: Cirkulace rychlosti

Určování intenzity víru je poměrně komplikované proto zavedeme další veličinu Cirkulaci rychlosti. Jedná se o skalární veličinu.



Element křivky: $$dk_i = \tau_i.dk = dx_i$$

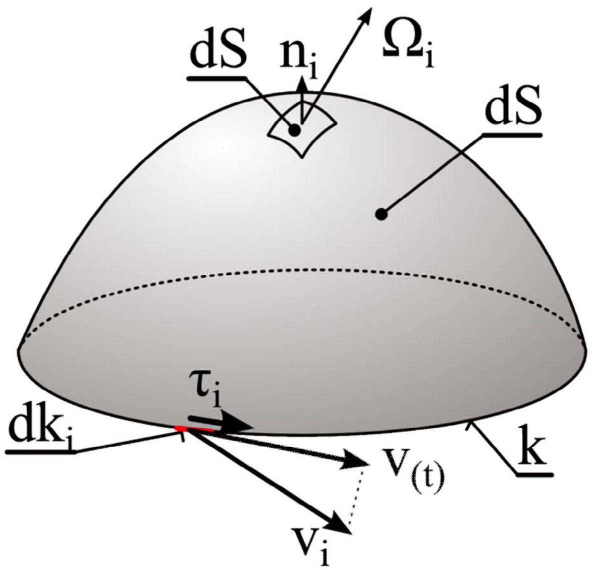
Sožka rychlosti v tečném směru: $$v_{(t)} = v_i.\tau_i$$

Cirkulace: $$\Gamma = \oint_k v_{(t)}.dk = \oint_k v_i.\tau_i.dk = \oint_k v_i.dx_i$$

Obsah

Základní pojmy: Stokesova věta

Stokesova věta vyjadřuje vztah mezi **tokem vektoru víru rychlosti plochou** a **cirkulací podél hranice** této plochy.



$$\mu = \int_S \Omega_i . n_i . dS = \int_S \left(rot\vec{v} \right)_i . n_i . dS = \oint_k v_i . \tau_i . dk = \Gamma$$

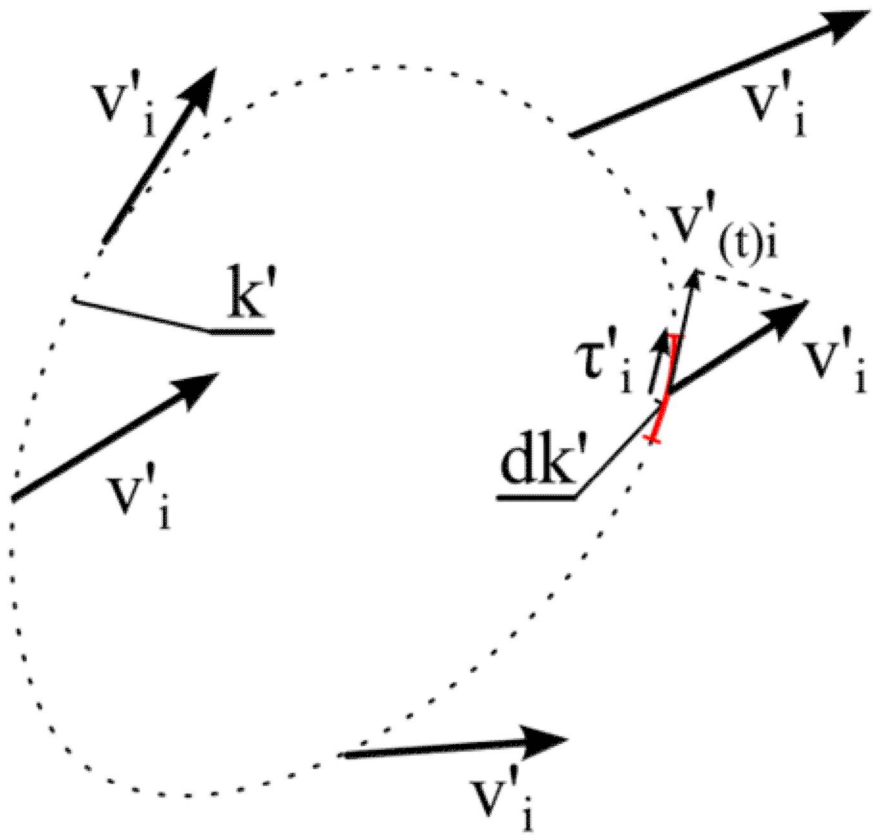
Na základě této věty je možné dokázat, že při **potenciálním** proudění **nemohou** být **proudnice uzavřené křivky**.

Obsah

Základní pojmy: Časová derivace cirkulace podél uzavřené křivky

Jedná se o cirkulaci kolem plovoucí křivky.

$$\Gamma = \oint_k v_i \tau_i dk = \oint_k v_i dx_i$$



Za časový okamžik se částice tvořící křivku přesunou do nové pozice.

Křivka k přejde do křivky k‘.

Cirkulaci kolem plovoucí křivky v čase t+dt je možné vyjádřit

$$\Gamma' = \oint_k v'_i \, \tau'_i \, dk' = \oint_k v'_i \, dx'_i$$

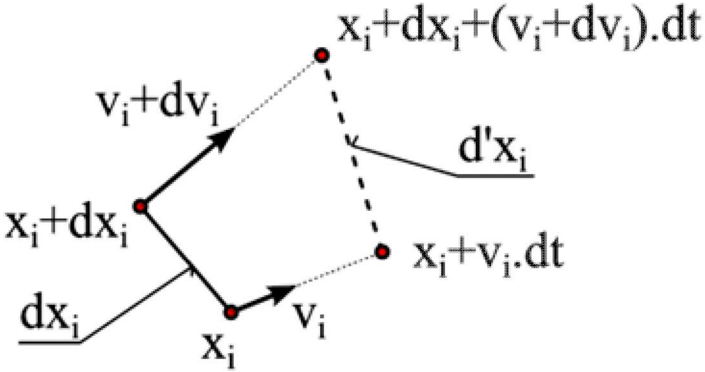
Obsah

Základní pojmy: Časová derivace cirkulace podél uzavřené křivky

Časovou změnu cirkulace podél plovoucí křivky můžeme tedy vyjádřit

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_k v_i dx_i = \oint_k \left[\frac{dv_i}{dt} dx_i + v_i \frac{d(dx_i)}{dt} \right]$$

Nyní je třeba vyjádřit změnu elementu dx_i v čase.



$$dx'_i = x_i + dx_i + (v_i + dv_i).dt - (x_i + v_i.dt)$$

$$dx'_i = dx_i + dv_i.dt$$

$$\frac{d(dx_i)}{dt} = \frac{dx'_i - dx_i}{dt} = \frac{dx_i + dv_i.dt - dx_i}{dt} = dv_i$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_k \left[\frac{dv_i}{dt} dx_i + v_i.dv_i \right]$$

$$\oint_k v_i.dv_i = \oint_k d\left(\frac{v_i^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_k \frac{dv_i}{dt} dx_i = \oint_k a_i dx_i$$

Základní pojmy: Otázky

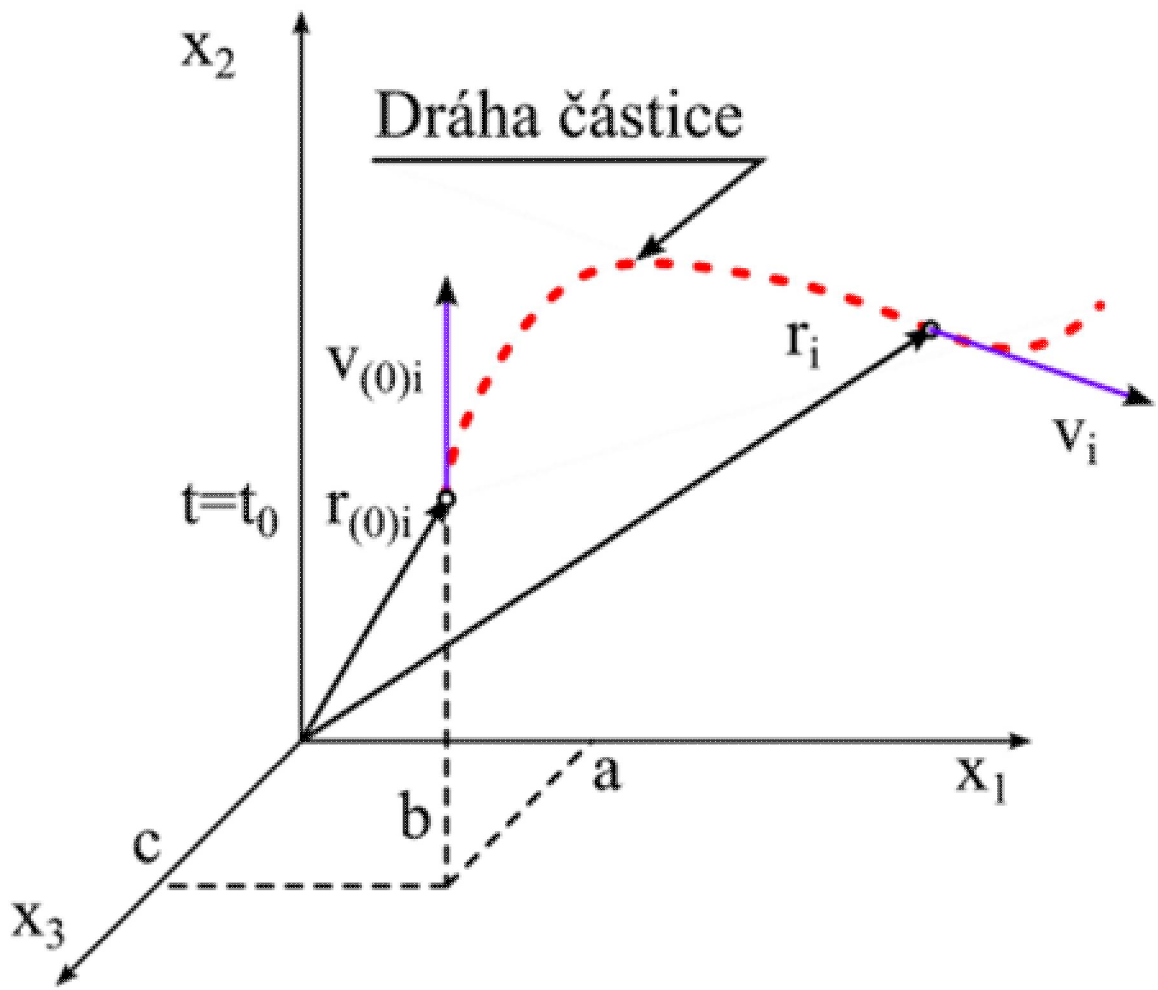
1. Metody popisu kontinua a základní pojmy (trajektorie, proudnice, rozklad pohybu dvou částic na rychlost translace, rotace a deformace, proudová trubice)

2. Základní pojmy vířivého pohybu kapalin.(rotor vektoru rychlosti a úhlová rychlost, vířivý pohyb, vírová čára, vírová trubice, intenzita víru, cirkulace rychlosti, Stokesova věta, časová derivace rychlosti podél uzavřené křivky)

Tak to je vše

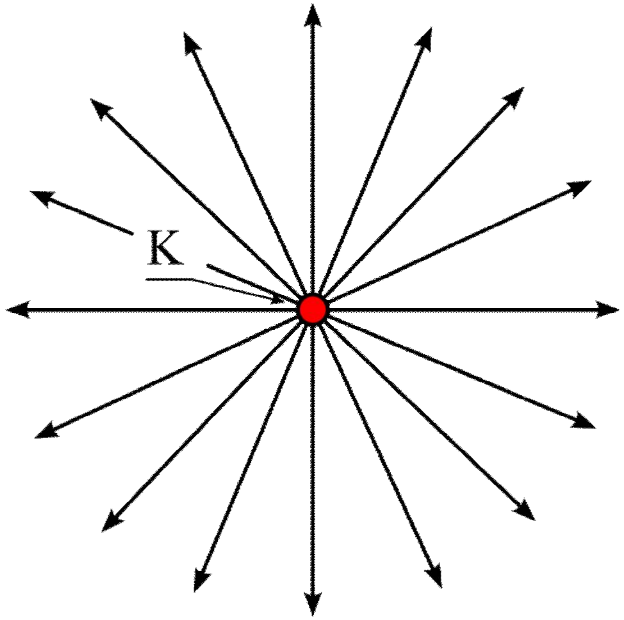
konec

Obsah

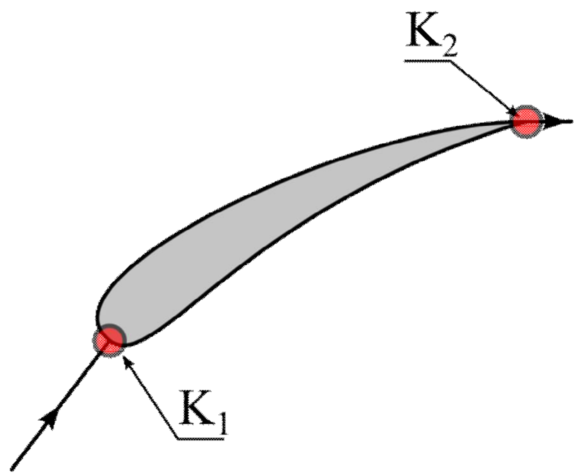


x2
Dráha částice
v(0)i
ri
vi
t=t0
r(0)i
a
x1
b
c
x3

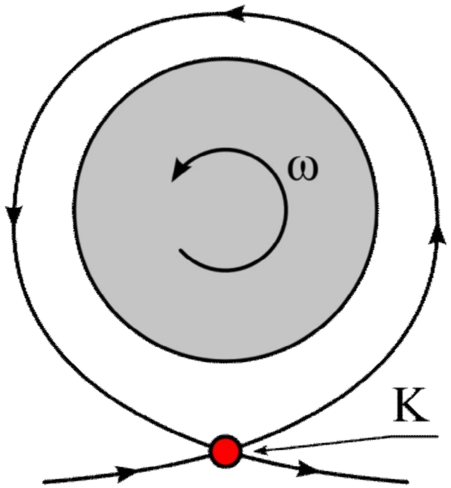
Tvar proudnic v okolí **zdroje/propadu**



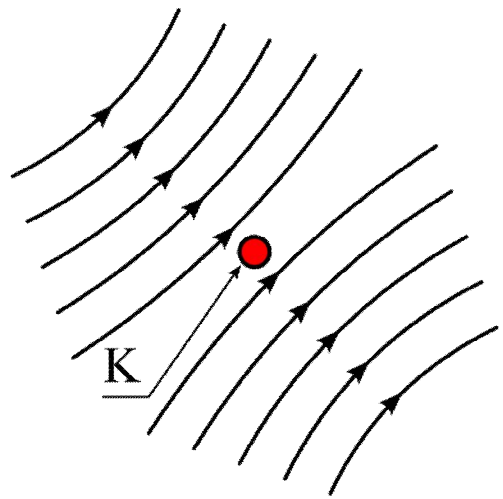
Kritické body na profilu



Kritické body – rotující válec



Proudnice se ke kritickému bodu blíží



Proudnice, při potenciálním proudění kolem víru.