Teorie Hydraulických strojů

Základní rovnice a zákony v mechanice tekutin

přednáška 3

Literatura :
Otakar Maštovský; HYDROMECHANIKA
Jaromír Noskijevič, MECHANIKA TEKUTIN
František Šob; HYDROMECHANIKA

3 Hydrodynamika

Rozdělení proudění:

Základní rovnice:

- ☞ Rovnice kontinuity
- ☞ Pohybové rovnice
  - Eulerova rovnice hydrodynamiky
  - Navier Stokesova rovnice
  - Reynoldsova rovnice

Odvozené rovnice:

- ☞ Bernouliova rovnice
- ☞ Věta o změně hybnosti

Hydrodynamika – rozdělení proudění

Podle dimense

1D - jednorozměrné

2D – dvourozměrné, rovinné.

3D – třírozměrné, prostorové.

Podle závislosti na čase

Stacionární

Nestacionární

Podle vlastností kapaliny - tekutiny

Podle závislosti na viskozitě	: proudění neviskosní kapaliny
	: proudění viskozní kapaliny
	- newtonské kapaliny
	- nenewtonské kapaliny
Podle stlačitelnosti	: proudění nestlačitelné kapaliny
	: proudění stlačitelné kapaliny

Obsah

3 *Hydrodynamika – rozdělení proudění*

Podle pohybu částic

Nevířivé = potenciální proudění

Vířivé proudění ideální kapaliny (není zde disipace energie)

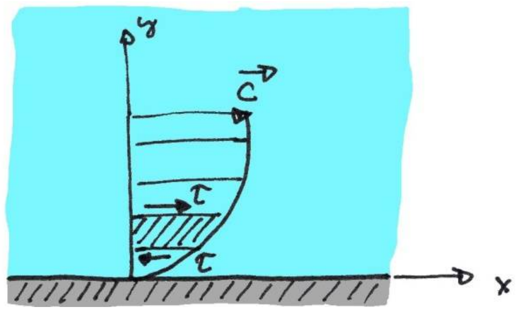
Proudění skutečné kapaliny

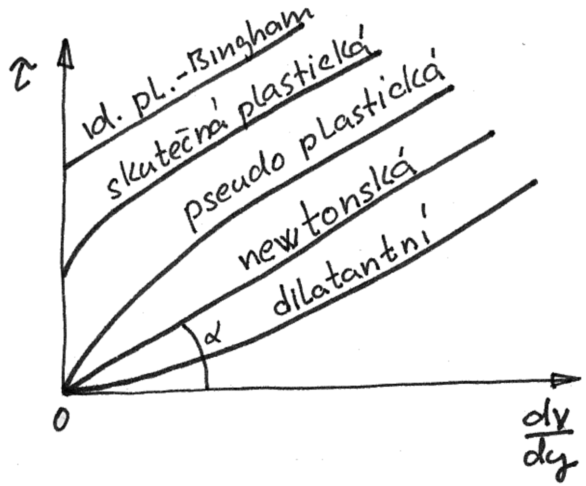
- Laminární proudění
- Turbulentní proudění
- Přechodové proudění

Newtonův zákon.

Vlivem viskozity se v kapalině vzniká tečné napětí τ

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

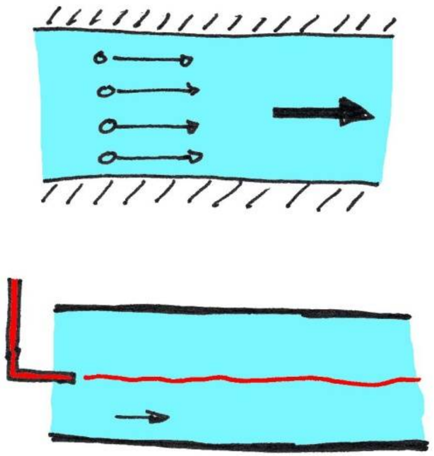




Obsah

Laminární proudění

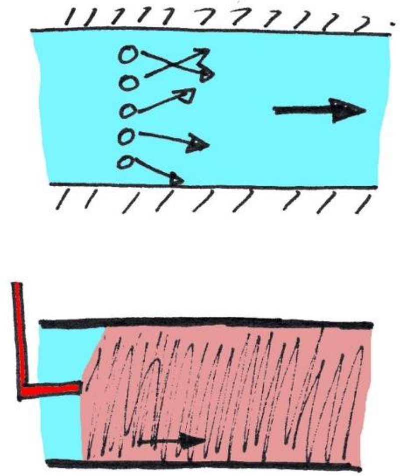
Částice se pohybují po vrstvách, ve směru středního proudu



$$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{kr}$$

Turbulentní proudění

Částice se pohybují napříč středního proudu.



$$\mathrm{Re}_{kr} < \mathrm{Re}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{v.d}{\nu}$$

Obsah

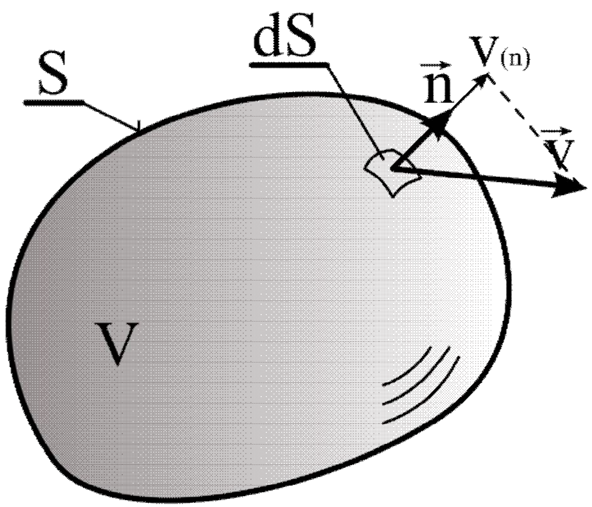
Zákon zachování hmoty je vyjádřen rovnicí kontinuity. Máme dvě možnosti vyjádření

I. Kontrolní objem

$$dQ_m = \rho \cdot v_i n_i \cdot dS$$

$$\Delta Q_m = \int_S \rho \cdot v_i . n_i \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$



Odvození

II. Plovoucí objem

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \cdot dV\right) = 0$$

Důkaz

Obsah

Odvození

$$\int_S \rho \cdot v_i . n_i \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho . dV$$

Na levou stranu použijeme GO větu

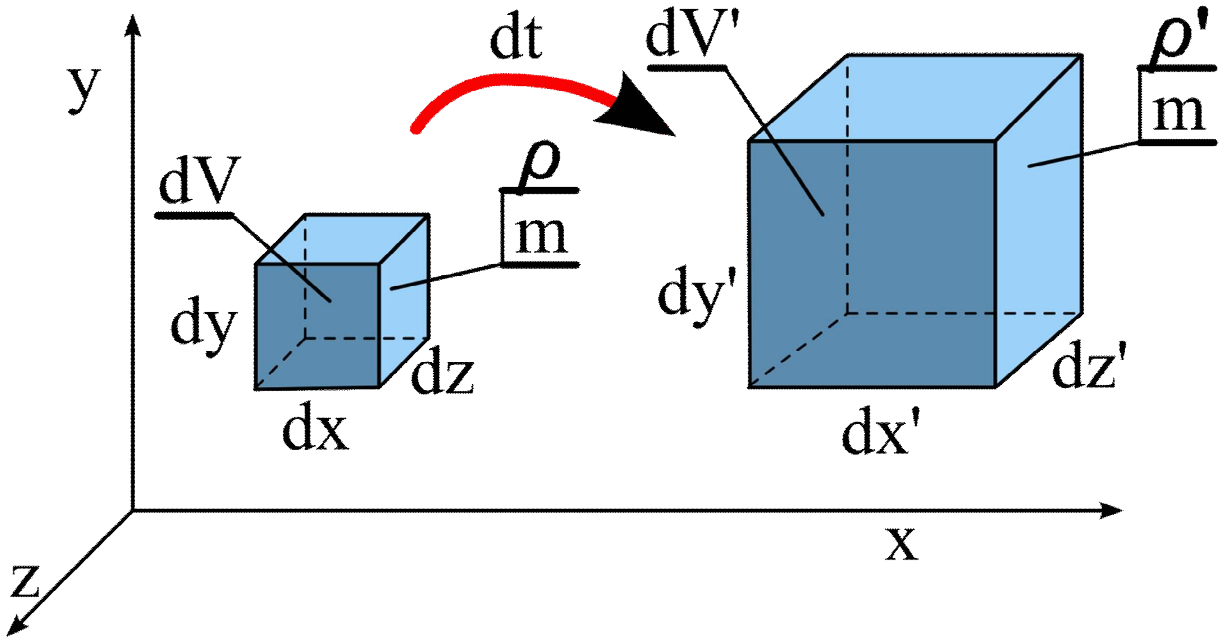
$$\int_V \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial x_i} \cdot dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} . dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_i)}{\partial x_i} = 0$$

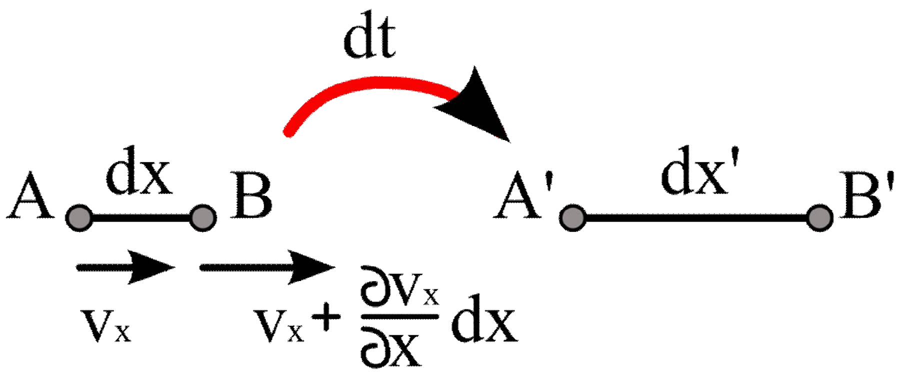
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Obsah



y
x
z
dt
dV
ρ
m
dy
dx
dz
dV'
ρ'
m
dy'
dx'
dz'



dt
A
dx
B
A'
dx'
B'
v_x
$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$

Zpět RK

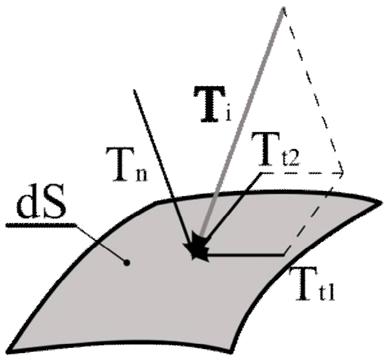
3 Hydrodynamika – Pohybová rovnice

Pohybová rovnice je sestavena na základě dynamické silové rovnováhy na makroskopickou částici. Využívá se d'Alambertova principu.

Síly působící na element kapaliny (makroskopickou částici)

Hmotnostní síly Jsou úměrné hmotnosti elementu. Např. tíhová síla, setrvačná síla.

Plošné síly Jsou úměrné ploše elementu.
Síla vyvolaná vektorem napětí



Pohybové rovnice v hydrodynamice

Eulerova rovnice hydrodynamiky. Pohybová rovnice ideální kapaliny. Jedná se o neviskózní kapalinu.

Navier Stokesova rovnice. Pohybová rovnice viskózní kapaliny. Jedná se o pohybovou rovnici při laminárním proudění

Reynoldsova rovnice. Pohybová rovnice viskózní kapaliny. Jedná se o pohybovou rovnici při turbulentním proudění.

Obsah

Eulerova rovnice hydrodynamiky – pohybová rovnice ***ideální*** (neviskózní) kapaliny. Vyjadřu-je silovou rovnováhu na element kapaliny.

Vycházíme z Eulerovy rovnice hydrostatiky. S tím, že částice se již pohybuje. Využijeme d‘Alambertova principu.

$$a_i = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky můžeme ještě upravit s využitím poznatků z matematického úvodu.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \delta_{ik}.\delta_{jn}\frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_j = \left(\delta_{ik}.\delta_{jn} - \delta_{in}.\delta_{jk}\right)\frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_j + \delta_{in}.\delta_{jk}\frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_j$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \varepsilon_{ijm}.\varepsilon_{knm}\frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_j + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\varepsilon_{ijm}.\varepsilon_{mnk}\frac{\partial v_k}{\partial x_n} v_j + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\varepsilon_{ijm}.\Omega_m.v_j + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j$$

Pak dostáváme **Lamb-Gromekův tvar** Eulerovy rovnice hydrodynamiky.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \varepsilon_{ikm}.\Omega_m.v_k + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \varepsilon_{ikm}.\Omega_m.v_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2} v^2\right) = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Obsah

Navier Stokesova rovnice – pohybová rovnice ***viskózní, nestlačitelné*** kapaliny při laminárním proudění. Odvození je stejné jako v případě Eulerovy rovnice hydrostatiky a hydrodynamiky. Hlavní změna je v plošných silách.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j=a_{(f)i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}.grad(\mathbf{v})=\mathbf{a}_{(f)}-\frac{1}{\rho}grad(p)+\frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}v_2+\frac{\partial v_1}{\partial x_3}v_3=a_{(f)1}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1.\partial x_1}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2.\partial x_2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3.\partial x_3}\right)$$

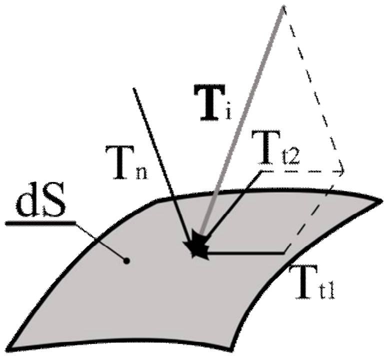
$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}v_2+\frac{\partial v_2}{\partial x_3}v_3=a_{(f)2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1.\partial x_1}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2.\partial x_2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3.\partial x_3}\right)$$

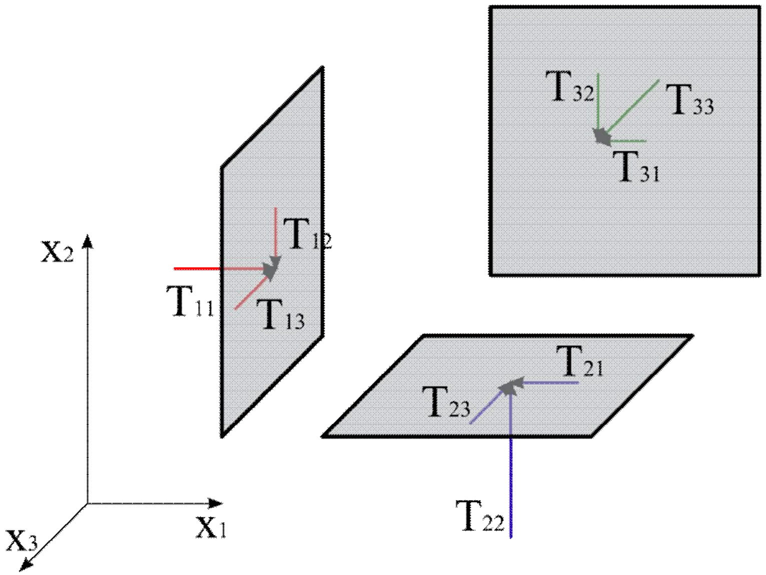
$$\frac{\partial v_3}{\partial t}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}v_1+\frac{\partial v_3}{\partial x_2}v_2+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}v_3=a_{(f)3}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1.\partial x_1}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2.\partial x_2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3.\partial x_3}\right)$$

Odvození

Obsah

Změna při psaní silové rovnováhy na element kapaliny je pouze v plošných silách. Úprava bude prováděna pouze pro plošné síly ostatní zůstává.





$$T_{ij}$$

i – Index plochy, na kterou síla působí

j – Složka dané síly do směru souřadné osy.

$$\mathbf{T}_{1j} = [T_{11}, \quad T_{12}, \quad T_{13}] = [p_1, \quad -\tau'_{12}, \quad -\tau'_{13}]$$
$$\mathbf{T}_{2j} = [T_{21}, \quad T_{22}, \quad T_{23}] = [-\tau'_{21}, \quad p_2, \quad -\tau'_{23}]$$
$$\mathbf{T}_{3j} = [T_{31}, \quad T_{32}, \quad T_{33}] = [-\tau'_{31}, \quad -\tau'_{32}, \quad p_3]$$

$$p_1 = p - \tau'_{11} \qquad p_2 = p - \tau'_{22} \qquad p_3 = p - \tau'_{33}$$

3 Hydrodynamika – Navier Stokesova rovnice, odvození

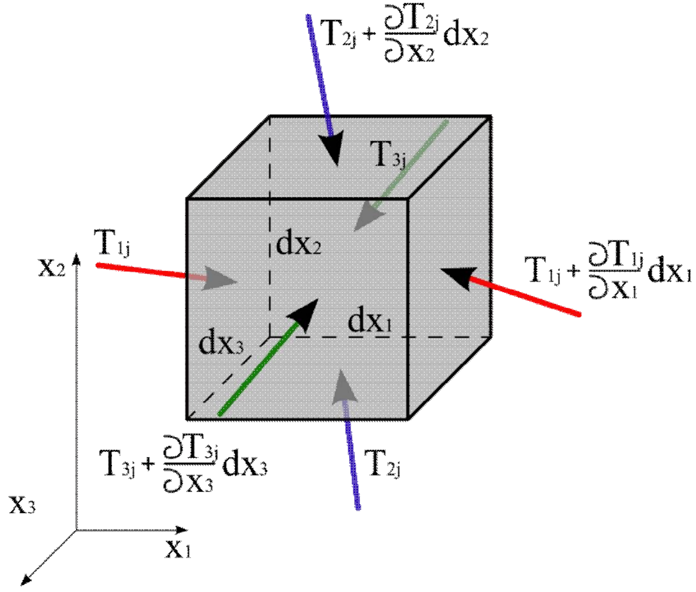
Silová rovnováha na element kapaliny ve směru osy x:

$$a_1.\rho.dV = a_{(f)1}\rho.dV +$$

$$+T_{11}.dx_2.dx_3 - \left(T_{11} + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2.dx_3 +$$

$$+T_{21}.dx_1.dx_3 - \left(T_{21} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2}dx_2\right).dx_1.dx_3 +$$

$$+T_{31}.dx_1.dx_2 - \left(T_{31} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1.dx_2$$



Po úpravě dostaneme:

$$a_1.\rho = a_{(f)1}\rho - \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3}\right)$$

Dosazením za jednotlivé složky vektoru plošných sil máme:

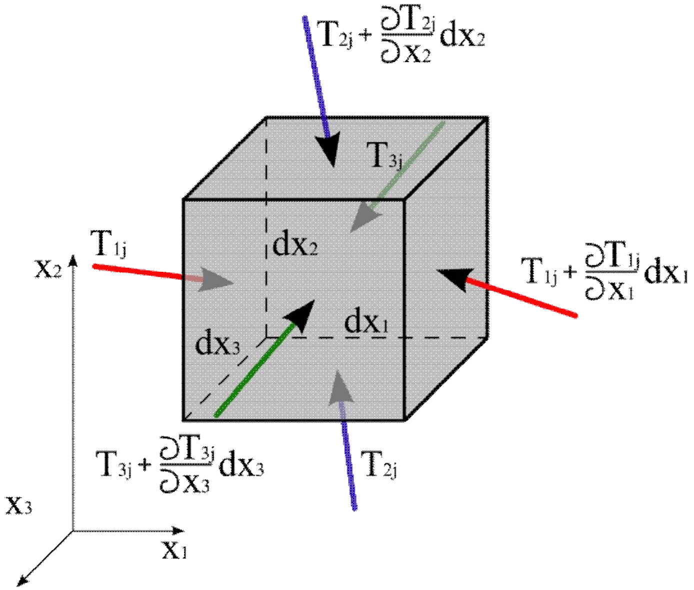
$$a_1 = a_{(f)1} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau'_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau'_{31}}{\partial x_3}\right)$$

Podobným způsobem můžeme udělat odvození pro ostatní složky:

$$a_1 = a_{(f)1} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau'_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau'_{31}}{\partial x_3}\right)$$

$$a_2 = a_{(f)2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau'_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau'_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau'_{32}}{\partial x_3}\right)$$

$$a_3 = a_{(f)3} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau'_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau'_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau'_{33}}{\partial x_3}\right)$$



$$\tau_{ij} = -\delta_{ij}.p + \tau'_{ij}$$

$$\tau'_{ij} = \begin{pmatrix} \tau'_{11} & \tau'_{12} & \tau'_{13} \\ \tau'_{21} & \tau'_{22} & \tau'_{23} \\ \tau'_{31} & \tau'_{32} & \tau'_{33} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j=a_{(f)i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j}$$

Newtonův zákon

$$\tau=\tau_{12}=\mu\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$\tau'_{ij}=C_{ijkl}.e_{kl}$$

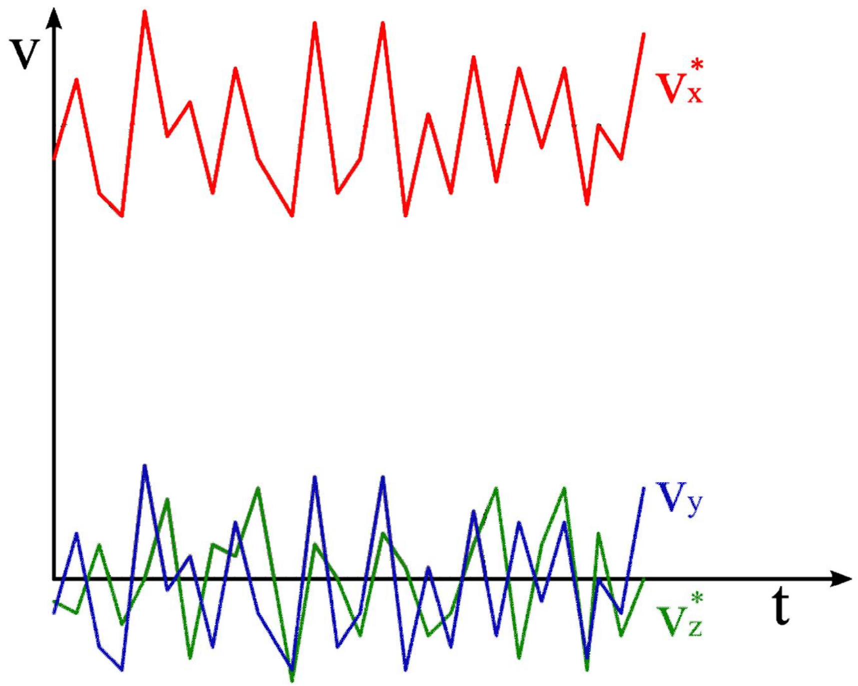
Zobecněný Newtonův zákon

$$\tau'_{ij}=\lambda.\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}+\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j=a_{(f)i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\lambda}{\rho}.\delta_{ij}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k\partial x_j}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j.\partial x_j}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j=a_{(f)i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{(\lambda+\mu)}{\rho}\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j.\partial x_j}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j=a_{(f)i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j.\partial x_j}$$



Turbulentní proudění– okamžitou rychlost rozložíme na dvě části:
- časově středovanou rychlost
- Fluktuační složka.

$$\vec{\mathbf{v}}^* = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}'$$

$\mathbf{v}^*$ Okamžitá rychlost

$\mathbf{v}$ Časově středovaná rychlost

$\mathbf{v}'$ Fluktuační složka.

Časově středovaná složka rychlosti může být vyjádřena:

$$\vec{v} = \overline{\vec{\mathbf{v}}^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \vec{\mathbf{v}}^* dt$$

Pro fluktuační složku musí platit:

$$\overline{\vec{\mathbf{v}}'} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \vec{\mathbf{v}}' dt = 0$$

Střední hodnoty součtů a součinů:

$$\overline{\mathbf{v}^*_{(1)} + \mathbf{v}^*_{(2)}} = \mathbf{v}_{(1)} + \mathbf{v}_{(2)}$$

$$\overline{\mathbf{v}_{(1)}.\mathbf{v}^*_{(2)}} = \overline{\mathbf{v}_{(1)}.\mathbf{v}_{(2)}} + \overline{\mathbf{v}_{(1)}.\mathbf{v}'_{(2)}} = \mathbf{v}_{(1)}.\mathbf{v}_{(2)}$$

$$\overline{\mathbf{v}^*_{(1)}.\mathbf{v}^*_{(2)}} = \mathbf{v}_{(1)}.\mathbf{v}_{(2)} + \overline{\mathbf{v}'_{(1)}.\mathbf{v}'_{(2)}}$$

$$\overline{\mathbf{v}'_{(1)}.\mathbf{v}'_{(2)}} \neq 0$$

Předpokládáme, že pro tlak také platí:

$$\overline{p^*} = \overline{p + p'} = p$$

Okamžité hodnoty rychlostí a tlaků dosadíme do N-S rovnice a provedeme středování přes časový úsek Δt.

$$\overline{\frac{\partial v_i^*}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} v_j^*} = a_{(f)i} - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}} + \frac{\mu}{\rho}\overline{\frac{\partial^2 v_i^*}{\partial x_j . \partial x_j}}$$

Po provedení časového středování a využití rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, pak dostáváme Reynoldsovu rovnici

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial \overline{\left(v'_i v'_j\right)}}{\partial x_j} = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j . \partial x_j}$$

Obsah

3 Hydrodynamika – Turbulentní napětí

Okamžité hodnoty rychlostí a tlaků dosadíme do N-S rovnice a provedeme středování přes časový úsek Δt.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j+\overline{\frac{\partial\left(v'_i\,v'_j\right)}{\partial x_j}}=a_{(f)i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j.\partial x_j}$$

Okamžité hodnoty rychlostí a tlaků dosadíme do N-S rovnice a provedeme středování přes časový úsek Δt.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\overline{\partial \left(v'_i \, v'_j \right)}}{\partial x_j} = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j . \partial x_j}$$

Obsah

Střední hodnoty součtů a součinů:

$$\overline{\mathbf{v}_1^* + \mathbf{v}_2^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2\right)dt = \frac{1}{\Delta t}\left(\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1 dt + \int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_1\, dt + \int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_2 dt + \int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_2\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1\int_0^{\Delta t} dt + 0 + \mathbf{v}_2\int_0^{\Delta t} dt + 0\right) = \frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1\Delta t + \mathbf{v}_2\Delta t\right) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$\overline{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1.\left(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2\right)dt = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\int_0^{\Delta t} dt + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{v}_1\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_2\, dt = \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2$$

$$\overline{\mathbf{v}_1^*.\mathbf{v}_2^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1\right).\left(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 dt + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1\mathbf{v}'_2\, dt + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}_2 dt + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}'_2\, dt =$$

$$= \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \overline{\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}'_2}$$

Zpět TP

3 Hydrodynamika – Bernoulliho rovnice

Je odvozena z Eulerovy rovnice hydrodynamiky, za předpokladů

Existuje potenciál vnějších, hmotnostních sil $\mathbf{a}_{(f)} = \mathrm{grad}(U)$

Uvažujeme ideální kapalinu – neviskozní a nestlačitelnou

Jak je odvozena?

Integrací Eulerovy rovnice hydrodynamiky (pohybová rovnice ideální kapaliny) po nějaké **křivce**.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \varepsilon_{ikm}.\Omega_m.v_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Tento člen vymizí pokud:

integrujeme po proudnici – Bernoulliho rovnice **Odvození**

se jedná o potenciální proudění – Lagrangeův integrál (libovolná křivka) **Odvození**

Obsah

3 Hydrodynamika – Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}v_{(1)}^2 + g.H_{(1)} + \frac{p_{(1)}}{\rho} = \frac{1}{2}v_{(2)}^2 + g.H_{(2)} + \frac{p_{(2)}}{\rho} + \int_p \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i$$

Bernoulliho rovnice vyjadřuje zákon zachování energie mezi dvěmi místy na **proudnici**

$\frac{v^2}{2}$	kinetická **měrná** energie
$\frac{p}{\rho}$	tlaková **měrná** energie
U	polohová **měrná** energie
$\int_p \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i$	změna urychlující **měrné** energie mezi místy 1 a 2.

Obsah

Různé tvary Bernoulliho rovnice | Rozměr

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}-U_1=\frac{v_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}-U_2+\int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L} \qquad \left[\frac{J}{kg}\right]$$

$$\rho.\frac{v_1^2}{2}+p_1-\rho.U_1=\rho.\frac{v_2^2}{2}+p_2-\rho.U_2+\rho.\int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L} \qquad [Pa]$$

$$\frac{v_1^2}{2.g}+\frac{p_1}{\rho.g}-\frac{U_1}{g}=\frac{v_2^2}{2.g}+\frac{p_2}{\rho.g}-\frac{U_2}{g}+\frac{1}{g}\int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L} \qquad [m]$$

Křivka, po které budeme integrovat je proudnice.
Vycházíme z následující rovnice

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \varepsilon_{ikm}.\Omega_m.v_k + \frac{\partial}{\partial xi}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\int_p \frac{\partial v_i}{\partial t}dx_i - \int_p \varepsilon_{ikm}.\Omega_m.v_k dx_i + \int_p \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)dx_i = \int_p a_{(f)i}.dx_i - \int_p \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}.dx_i$$

Element proudnice můžeme vyjádřit

$$\mathrm{dx_i} = \mathrm{v_i.dt}$$

$$\varepsilon_{ikm}.\Omega_m.v_k dx_i = \varepsilon_{ikm}.\Omega_m.v_k.v_i dt = 0$$

$$\int_p \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dx_i} + \int_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)\mathrm{dx_i} = \int_p \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dx_i}}.\mathrm{dx_i} - \int_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}}\left(\frac{\mathrm{p}}{\rho}\right).\mathrm{dx_i}$$

Obsah

Předchozí rovnici můžeme upravit

$$\int_p \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + \int_p \frac{d}{dx_i}\left(\frac{1}{2}v^2 - U + \frac{p}{\rho}\right) dx_i = 0$$

$$\int_p \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i + \left(\frac{1}{2}v_{(2)}^2 - U_{(2)} + \frac{p_{(2)}}{\rho}\right) - \left(\frac{1}{2}v_{(1)}^2 - U_{(1)} + \frac{p_{(1)}}{\rho}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}v_{(1)}^2 - U_{(1)} + \frac{p_{(1)}}{\rho} = \frac{1}{2}v_{(2)}^2 - U_{(2)} + \frac{p_{(2)}}{\rho} + \int_p \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i$$

V případě, že na kapalinu působí pouze gravitační zrychlení dostáváme

$$U = -g.y + C$$

$$\frac{1}{2}v_{(1)}^2 + g.H_{(1)} + \frac{p_{(1)}}{\rho} = \frac{1}{2}v_{(2)}^2 + g.H_{(2)} + \frac{p_{(2)}}{\rho} + \int_p \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_i$$

Hydrodynamika – Lagrangeúv integrál - odvození

V případě potenciálního proudění musí platit že

$$\Omega_m = \varepsilon_{mkl} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} = (\mathrm{rot} v_i)_m = 0$$

Tedy člen, který dělá neplechu vymizí automaticky. Integrovat tedy můžeme po libovolné křivce. Dále je třeba si uvědomit

$$v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad a_{(f)i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Pak můžeme integrovat po libovolné křivce

$$\int_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) dx_i + \int_k \frac{\partial}{\partial xi}\left(\frac{1}{2} v^2\right) dx_i = \int_k \frac{\partial U}{\partial x_i} .dx_i - \int_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) .dx_i$$

$$\int_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 - U + \frac{p}{\rho}\right) dx_i = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 - U + \frac{p}{\rho} = \mathrm{konst}$$

3 Hydrodynamika – věta o změně hybnosti.

Věta o změně hybnosti je odvozena z Eulerovy rovnice hydrodynamiky, za předpokladů.

Je odvozena pro **ideální** kapalinu – nestlačitelnou a neviskózní

Jak je odvozena?

Integrací Eulerovy rovnice hydrodynamiky přes uvažovaný (kontrolní) objem kapaliny.

$$\boxed{\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}} \qquad \Big|\cdot \mathrm{dm} = \rho.\mathrm{dV}$$

$$\int_{V_K} \frac{\partial v_i}{\partial t}.\rho.dV + \int_{V_K} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.v_j.\rho.dV = \int_{V_K} a_{(f)i}.\rho.dV - \int_{V_K} \frac{\partial p}{\partial x_i}.dV$$

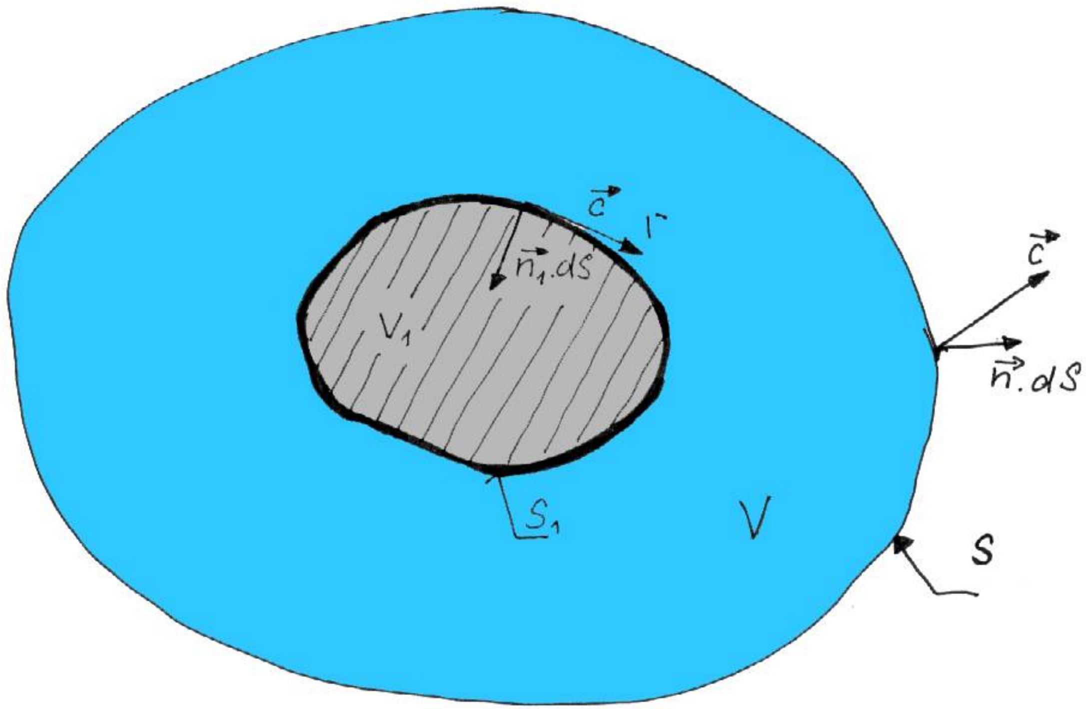
Po úpravě, při které využijeme Gaus-Ostrogradského větu dostaneme:

$$\boxed{\int_{S_K} \rho.x_i.\left(a_j.n_j\right)dS + \int_{S_K} \rho.v_i.\left(v_j.n_j\right)dS = G_i - \int_{S_K} p.n_i.dS}$$

Odvození Obsah

Síla na obtékané těleso.

$$\int\limits_{S_K} \rho.v_i.\left(v_j.n_j\right).dS = G_i - \int\limits_{S_K} p.n_i.dS$$



Vycházíme z ERH, a integrujeme ji přes zvolený objem kapaliny, ve kterém chceme znát silové působení kapaliny.

$$\int_{V_K} \frac{\partial v_i}{\partial t}.\rho.dV + \int_{V_K} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.v_j.\rho.dV = \int_{V_K} a_{(f)i}.\rho.dV - \int_{V_K} \frac{\partial p}{\partial x_i}.dV$$

Objem V_K je kontrolním objemem. Integrály se budeme snažit upravit tak, abychom na ně mohli Aplikovat Gauss-Ostrogradského větu.

Úprava nestacionárního členu

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} x_i\right) = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j.\partial t}.x_i + \frac{\partial v_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0 + \frac{\partial v_j}{\partial t}\delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Na takto upravený nestacionární člen můžeme aplikovat Gauss-Ostrogradského větu

$$\int_{V_k} \frac{\partial v_i}{\partial t}.\rho.dV = \int_{V_k} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho.\frac{\partial v_j}{\partial t} x_i\right).dV = \int_{S_k} \frac{\partial v_j}{\partial t} x_i.n_j.\rho.dS$$

$$= \int_{S_k} \rho.a_{(t)j}.n_j.x_i.dS$$

Zpět VOZH

Vycházíme z ERH, a integrujeme ji přes zvolený objem kapaliny, ve kterém chceme znát silové působení kapaliny.

$$\int_{V_K} \frac{\partial v_i}{\partial t}.\rho.dV + \int_{V_K} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.v_j.\rho.dV = \int_{V_K} a_{(f)i}.\rho.dV - \int_{V_K} \frac{\partial p}{\partial x_i}.dV$$

Konvektivní člen můžeme upravit následujícím způsobem.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}.v_j.\rho = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.v_j.\rho + \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.v_i.\rho = \frac{\partial\left(v_i.v_j.\rho\right)}{\partial x_j}$$

Nyní budeme opět aplikovat GO větu.

$$\int_{V_K} \frac{\partial\left(v_i.v_j.\rho\right)}{\partial x_j}.dV = \int_{S_K} v_i.v_j.n_j.\rho.dV$$

$$\int_{V_K} a_{(f)i}.\rho.dV = \int_{V_K} g_i.\rho.dV = G_i$$

$$\int_{V_K} \frac{\partial p}{\partial x_i}.dV = \int_{S_K} p.n_i.dV$$

Zpět VOZH

Výsledná rovnice tedy je ve tvaru:

$$\boxed{\int_{S_K} \rho . x_i . \left(a_{(t)j} . n_j \right) . dS + \int_{S_K} \rho . v_i . \left(v_j . n_j \right) . dS = G_i - \int_{S_K} p . n_i . dS}$$

Zpět VOZH