Rovinné proudění

Osnova

- Definice 2D a 1D proudění
- Definice průtoku při 2D proudění
- Proudová funkce Ψ
- Vektor víru rychlosti při rovinném proudění
- Druhá Helmholtzova věta o zachování víru
- Nevířivé – potenciální proudění

Konec

Definice 2D a 1D proudění

Rovinné proudění je takové proudění, při kterém dokážeme najít takovou polohou daného souřadného systému, kde v jednom směru bude složka rychlosti nulová a zbývající dvě se v tomto směru nebudou měnit.

$$v_3 = 0 \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0$$

Jednorozměrné proudění je takové proudění, při kterém dokážeme najít takovou polohou daného souřadného systému, kde ve dvou směrech budou složky rychlosti nulové a zbývající složka se v těchto směrech nebude měnit.

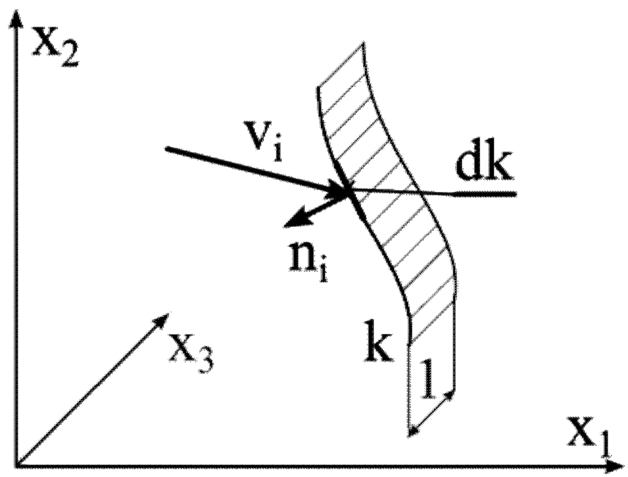
$$v_2 = 0 \qquad v_3 = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0$$

Definice průtoku při rovinném proudění

Průtok při rovinném proudění stanovujeme jako tok vektoru rychlosti křivkou která leží v rovině proudění.

$$Q = \int_k v_i . n_i . dl \quad [m^2 . s^{-1}]$$



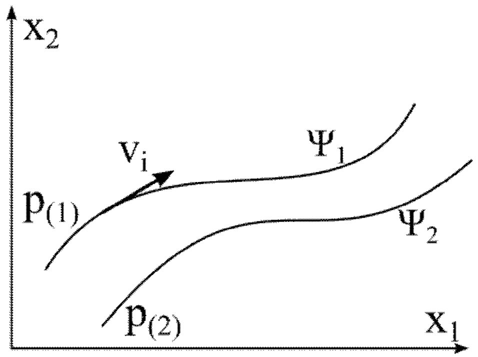
Proudová funce Ψ

Při rovinném (2D) proudění můžeme definovat **Proudovou funkci Ψ**.

Proudová funkce Ψ je definována následujícím způsobem

- **umíme** ji určit pro 2D proudění
- je to skalární funkce $\Psi(x_i,t)$, t – je parametr
- **je konstantní na proudnici**

$$d\psi = grad(\psi).d\vec{l} = 0$$



$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}.dx_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}.dx_2 = 0$$

Proudová funce Ψ

Jaký je vztah mezi proudovou funkcí a rychlostí?

Pro proudovou funkci na proudnici platí: $$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}.dx_2 = 0$$

Pro proudnici platí: $$\varepsilon_{ijk}.v_j.dx_k = 0$$

Pro proudnici při 2D proudění platí: $$\varepsilon_{3jk}.v_j.dx_k = v_1.dx_2 - v_2.dx_1 = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}.dx_2 = v_1.dx_2 - v_2.dx_1$$

dx_i je na obou stranách element proudnice

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = v_2 \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = v_1$$

$$v_i = \varepsilon_{ij3}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

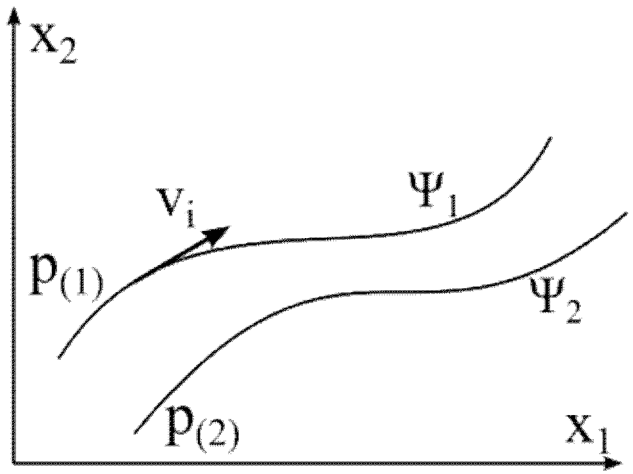
Proudová funce Ψ

Jaký je fyzikální význam hodnoty proudové funkce?

Žádný!

Fyzikální význam má pouze její rozdíl:

$$\psi_1 - \psi_2 = C.Q$$



Rozdíl hodnot proudových funkcí je úměrný průtokou. C- konstanta úměrnosti.

Vektor víru rychlosti při rovinnémproudění

Jak vypadá vektor víru rychlosti při rovinném proudění?

$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

Je třeba mít na paměti co platí při rovinném proudění

$$v_3 = 0 \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0$$

Pak:

$$\Omega_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\Omega_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\Omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

Druhá Helmholtzova věta o zachování víru

Helmholtzova věta o zachování víru.

Vycházíme z Eulerovy rovnice hydrodynamiky

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \varepsilon_{ijm}.v_j.\Omega_m = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) \qquad \text{(Lamb-Gromekův tvar)}$$

Na tuto rovnici budeme aplikovat operátor rotor.

$$\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) + \cancel{\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right]} - \varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\varepsilon_{ijm}.v_j.\Omega_m\right) = \cancel{\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)} - \cancel{\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right)\right]}$$

Víme, že platí.

$$\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}grad(U) = 0$$

Takže

$$\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right) - \varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\varepsilon_{ijm}.v_j.\Omega_m\right) = 0$$

Druhá Helmholtzova věta o zachování víru

Předcházející vztah se dá upravit

$$\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)-\varepsilon_{rli}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\varepsilon_{ijm}.v_j.\Omega_m\right)=0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial t}-\varepsilon_{rli}.\varepsilon_{ijm}\frac{\partial\left(v_j.\Omega_m\right)}{\partial x_l}=0$$

Víme:

$$\varepsilon_{rli}.\varepsilon_{ijm}\quad=-\varepsilon_{rli}.\varepsilon_{jim}\quad=\varepsilon_{rli}.\varepsilon_{jmi}\quad=\delta_{rj}.\delta_{lm}-\delta_{rm}.\delta_{lj}$$

Pak:

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial t}-\left(\delta_{rj}.\delta_{lm}-\delta_{rm}.\delta_{lj}\right)\frac{\partial\left(v_j.\Omega_m\right)}{\partial x_l}=0$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial t}-\delta_{rj}.\delta_{lm}.\frac{\partial\left(v_j.\Omega_m\right)}{\partial x_l}+\delta_{rm}.\delta_{lj}\frac{\partial\left(v_j.\Omega_m\right)}{\partial x_l}=0$$

$$\frac{D\Omega_r}{Dt}-\frac{\partial v_r}{\partial x_j}\Omega_j=0$$

Druhá Helmholtzova věta o zachování víru

Takže pro 3D proudění neviskózní kapaliny platí

$$\frac{D\Omega_i}{Dt} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Omega_j = 0$$

Pro rovinné proudění platí:

$$v_3 = 0 \qquad \Omega_1 = 0 \qquad \Omega_2 = 0$$

Takže:

$$\boxed{\frac{D\Omega_3}{Dt} = 0}$$

Nevířivé - potenciální proudění

Pro potenciální – nevířivé proudění musí platit

$$rot\vec{v}=0 \qquad \Omega_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0$$

Pak existuje skalární funkce – potenciál rychlosti Φ.

Mezi rychlostí a potenciálem rychlosti platí vztah

$$v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Pokud uvažujeme nestlačitelnou kapalinu pak máme rovnici kontinuity ve tvaru:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Při potenciální proudění můžeme za rychlost dosadit předchozí vztah a dostaneme

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i . \partial x_i} = 0$$

To je Laplaceova rovnice

$$\Delta\Phi = 0$$

Z matematického hlediska je to homogenní **lineární** diferenciální rovnice druhého řádu