Potenciální (nevířivé) rovinné proudění

Osnova

Konec

Předpoklady

Předpoklady, aneb jakým prouděním se budeme zabývat.

Rovinné proudění = 2D proudění

Nevířivé proudění = potenciální proudění

Ideální kapalina

Nestlačitelná = hustota je konstantní

Neviskózní. (limitní případ kdy je $Re=\infty$)

Základní rovnice a funkce

Při potenciální proudění platí, že

$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \text{Existuje potenciál rychlosti } \Phi \Rightarrow v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^{\ 2}} = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0$$

Pro nevířivé proudění musí platit

$$\Omega_i = 0$$

Pro rovinné proudění platí

$$v_i = \varepsilon_{ij3}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \Rightarrow v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \qquad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

$$\Omega_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^{\ 2}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^{\ 2}} = 0$$

$$\Delta\psi = 0$$

Obsah

Základní rovnice a funkce

Máme tedy dvě rovnice, které popisují potenciální proudění ideální kapaliny.

Z matematického hlediska jsou obě rovnice stejné. Jsou to Laplaceovy rovnice.
Jsou to **lineární** parciální diferenciální rovnice druhého řádu. Nicméně jejich fyzikální význam je jiný.

$\Delta\Phi = 0$ Tato rovnice vyjadřuje rovnici kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu.

$\Delta\psi = 0$ Tato rovnice vyjadřuje podmínku nevířivosti při rovinném proudění.

Funkce komplexního potenciálu

Máme-li dvě funkce u(x,y) a v(x,y), které splňují následující podmínku,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

pak platí, že existuje funkce komplexní proměnné z ve tvaru

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

My takové funkce máme

$$v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \qquad v_i = \varepsilon_{ij3}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij3}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Můžeme tedy definovat funkci komplexního potenciálu

$$W(z) = \Phi + i\Psi$$

Obsah

Funkce komplexního potenciálu

Tato funkce má jednoznačnou derivaci v bodě z a to ať derivujeme v jakémkoli směru.
Bude tedy platit

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{i.\partial y}$$

Můžeme si to dokázat přitom je třeba si uvědomit, že platí

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}.\frac{i}{i} = -i$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y = \bar{v}$$

$$\frac{\partial W}{i.\partial y} = \frac{\partial \Phi}{i.\partial y} + i\,\frac{\partial \psi}{i.\partial y} = v_x - iv_y = \bar{v}$$

Obecně tedy platí

$$\bar{v} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

Funkce komplexního potenciálu

Je dobré si uvědomit vzájemné vlastnosti proudové funkce a potenciálu rychlosti.

Při rovinném proudění můžeme definovat dva systémy křivek

$\psi = konst$ Toto jsou nám známé **proudnice**

$\Phi = konst$ Toto jsou **ekvipotenciály** – čáry konstantního potenciálu

Proudnice a ekvipotenciály jsou na sebe vzájemně kolmé křivky.

Můžeme to dokázat následujícím způsobem.

Gradient potenciálu rychlosti musí být kolmý na ekvipotenciálu, a podobně i gradient proudové funkce musí být kolmý na proudnici.

Pokud tyto gradienty skalárně vynásobíme, pak pokud dostaneme nulu tak jsou na sebe kolmé. A to znamená, že i tečny k těmto křivkám jsou na sebe vzájemně kolmé.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} . \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} . \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} . \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -v_1 . v_2 + v_2 . v_1 = 0$$

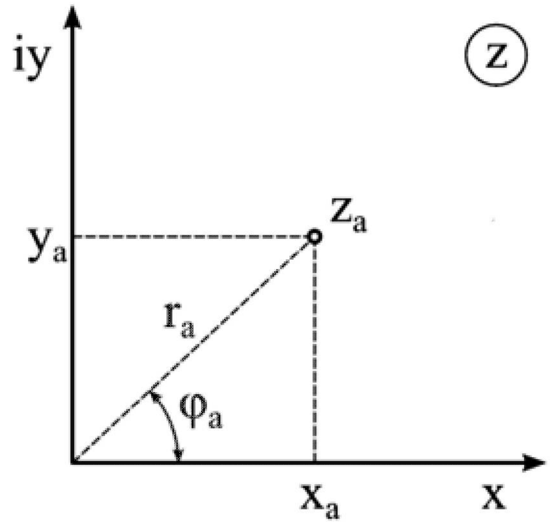
Základní pravidla počítání s komplexními čísly

Komplexní číslo má reálnou a imaginární část. Imaginární část je násobena imaginárním číslem i.

$$z = x + iy$$

$i^2 = -1$ $\qquad$ $\sqrt{-1} = i$

$z = r.e^{i\varphi}$ $\qquad$ $e^{i\varphi} = cos\varphi + i.sin\varphi$



$$x = r.cos\varphi$$

$$y = r.sin\varphi$$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\qquad$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3.\pi}{2}} = -i$

$e^{i\pi} = -1$ $\qquad$ $e^{i2.\pi} = 1$

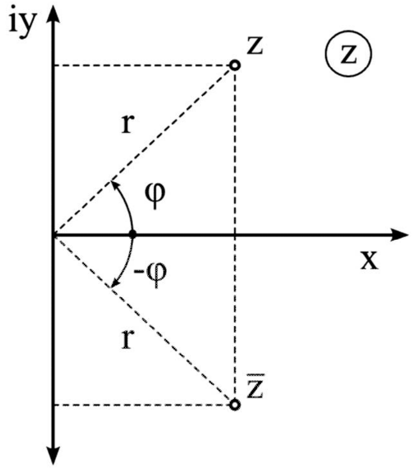
Obsah

Základní pravidla počítání s komplexními čísly

Komplexně sdružené číslo:

$$z = x + iy \qquad\qquad z = r.e^{i\varphi}$$

$$\bar{z} = x - iy \qquad\qquad \bar{z} = r.e^{-i\varphi}$$



Kruhově inverzní číslo

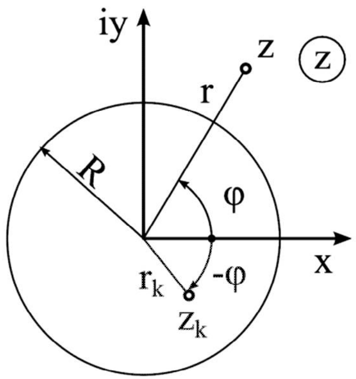
$$z_k = \frac{R^2}{z} \quad = \frac{R^2}{r.e^{i\varphi}} \quad = \frac{R^2}{r}.e^{-i\varphi}$$

$$z_k = R.\frac{R}{r}.e^{-i\varphi} \qquad\qquad r_k = R.\frac{R}{r}$$

$$z_k = -\frac{R^2}{z} \quad = e^{i.\pi}\frac{R^2}{r.e^{i\varphi}} \quad = \frac{R^2}{r}.e^{i.(\pi-\varphi)}$$

$$z_k = i\frac{R^2}{z} \quad = e^{i.\frac{\pi}{2}}\frac{R^2}{r.e^{i\varphi}} \quad = \frac{R^2}{r}.e^{i.\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

$$z_k = -i\frac{R^2}{z} \quad = e^{i.\frac{3.\pi}{2}}\frac{R^2}{r.e^{i\varphi}} \quad = \frac{R^2}{r}.e^{i.\left(\frac{3.\pi}{2}-\varphi\right)} \quad = \frac{R^2}{r}.e^{i.\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$



Obsah

Základní pravidla počítání s komplexními čísly

Operace s komplexními čísly

Sčítání

$$z_a + z_b = (x_a + iy_a) + (x_b + iy_b)$$

$$z_a + z_b = (x_a + x_b) + i(y_a + y_b)$$

Násobení

$$z_a . z_b = (x_a + i.y_a).(x_b + i.y_b)$$

$$z_a . z_b = x_a . x_b + i.x_a . y_b + i.y_a . x_b + i^2 . y_a . y_b$$

$$z_a . z_b = (x_a . x_b - y_a . y_b) + i.(x_a . y_b + y_a . x_b)$$

$$z.\bar{z} = (x + i.y).(x - i.y) = x^2 + i.x.y - i.x.y + y^2 = x^2 + y^2 = r^2$$

$$z.z_k = z.\frac{R^2}{z} = R^2$$

Vyjádření reálné a imaginární části výrazu

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} . \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{r^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r.e^{i\varphi}} = \frac{1}{r}.e^{-i\varphi} = \frac{r}{r^2}.e^{-i\varphi} = \frac{\bar{z}}{r^2}$$

Jednoduché proudové útvary – paralelní proud

Vycházíme z následující funkce komplexní proměnné.

$$W_1 = z_a.z = (x_a + i.y_a).(x + i.y)$$

Tuto funkci rozdělíme na reálnou a imaginární část.

$$W_1 = (x_a.x - y_a.y) + i.(x_a.y + y_a.x)$$

Potenciál rychlosti

$$\Phi = x_a.x - y_a.y$$

Proudová funkce

$$\Psi = x_a.y + y_a.x$$

Jednoduché proudové útvary – paralelní proud

Potenciál rychlosti

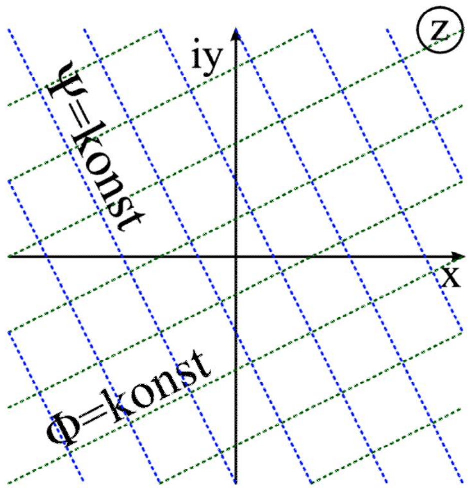
$$\Phi = x_a . x - y_a . y$$

Pro ekvipotenciály platí následující rovnice

$$y = \frac{x_a}{y_a} . x - \frac{\Phi}{y_a}$$

Jsou to přímky se směrnicí x_a/y_a.

Složky vektoru ve směru ekvipotenciál jsou. (y_a , x_a)



Proudová funkce

$$\Psi = x_a . y + y_a . x$$

Pro proudnice platí následující rovnice

$$y = -\frac{y_a}{x_a} . x + \frac{\Psi}{x_a}$$

Jsou to přímky se směrnicí $-y_a/x_a$.

Složky vektoru ve směru proudnic jsou. (x_a , $-y_a$)

Ekvipotenciály a proudnice jsou na sebe vzájemně kolmé přímky.

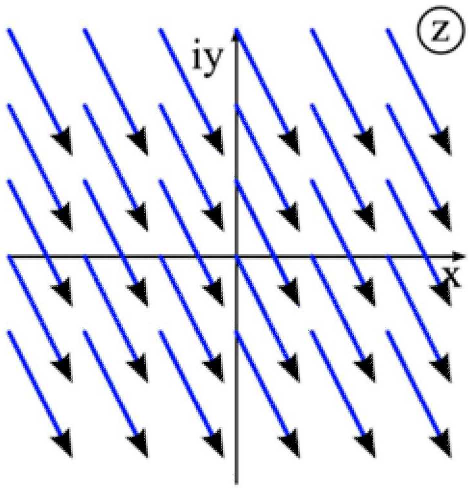
Obsah

Jednoduché proudové útvary – paralelní proud

Co vyjadřuje konstanta z_a?

První derivace funkce komplexní proměnné vyjadřuje komplexně sdruženou rychlost

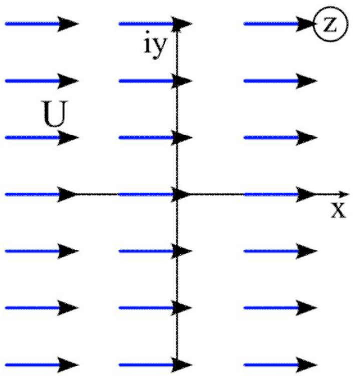
$$\overline{v} = \frac{\partial W_1}{\partial z} = z_a = x_a + i.y_a \quad \Rightarrow \quad v = x_a - i.y_a$$



Komplexně sdružená rychlost (a tím i skutečná rychlost) je v celé rovině konstantní a odpovídá komplexně sdruženému číslu ke konstantě z_a.

Pro speciální případ paralelního proudu, který je rovnoběžný s osou x a jehož rychlost má velikost U máme následující funkci komplexního potenciálu

$$W_1 = U.z$$



Obsah

Jednoduché proudové útvary – zdroj/propad

Uvažujme funkci komplexní proměnné ve tvaru

$$W = z_a.\ln(z) = (x_a + i.y_a).\ln(z) = x_a.\ln(z) + i.y_a.\ln(z) = W_2 + W_3$$

Nyní budeme zkoumat funkci **komplexní proměnné W_2**.

Tuto funkci rozdělíme na reálnou a imaginární část.

$$W_2 = x_a.\ln(z) = x_a.\ln(r.e^{i.\varphi}) = x_a.\left[\ln(r) + \ln(e^{i.\varphi})\right] = x_a.\ln(r) + x_a.i.\varphi$$

Potenciál rychlosti

$$\Phi = x_a.\ln(r)$$

Proudová funkce

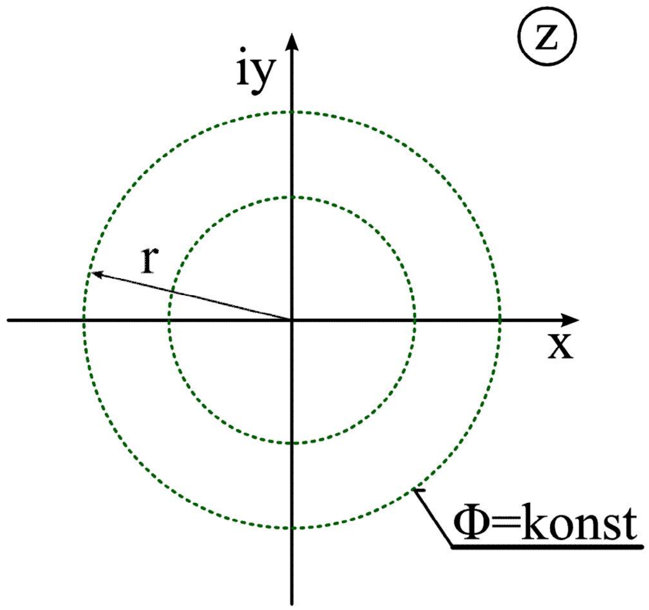
$$\Psi = x_a.\varphi$$

Jednoduché proudové útvary – zdroj/propad

Jak vypadají ekvipotenciály?

$$\Phi = x_a . \ln(r) \quad \Rightarrow \quad \ln(r) = \frac{\Phi}{x_a} \quad \Rightarrow \quad r = konst$$

Pro ekvipotenciálu platí, že Φ=konst. Z toho vyplývá, že ekvipotenciály jsou kružnice se středem v počátku.

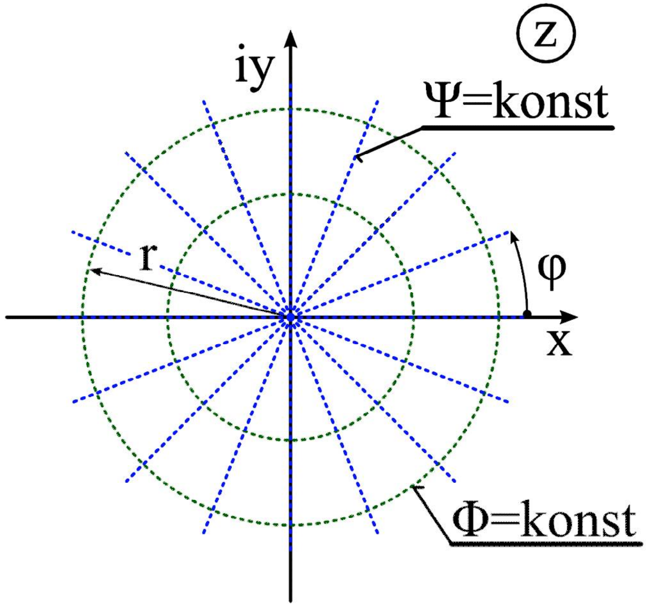


Jednoduché proudové útvary – zdroj/propad

Jak vypadají proudnice?

$$\Psi = x_a . \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\Psi}{x_a} \quad \Rightarrow \quad \varphi = konst$$

Pro proudovou funkci platí, že Ψ = konst, takže proudnice jsou polopřímky vycházející z počátku.



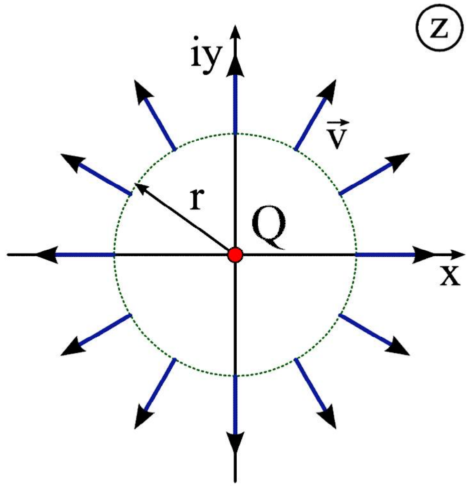
Obsah

Jednoduché proudové útvary – zdroj/propad

Jak určíme konstantu x_a?

Vyjádříme komplexně sdruženou rychlost

$$\bar{v} = \frac{\partial W_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x_a . lnz) = x_a . \frac{1}{z} = \frac{x_a}{r . e^{i\varphi}} = \frac{x_a}{r} . e^{-i\varphi}$$



$$\boxed{v = \frac{x_a}{r} . e^{i\varphi}} \qquad |v| = \frac{x_a}{r}$$

Velikost rychlosti je funkcí pouze vzdáleností od zdroje *r*.

Vyjádříme průtok kružnicí kolem zdroje.

$$Q = v . S = \frac{x_a}{r} . 2 . \pi . r . 1 = x_a . 2 . \pi . \Rightarrow x_a = \frac{Q}{2 . \pi}$$

Funkce komplexního potenciálu pro zdroj umístěný v počátku máme.

$$W_2 = \frac{Q}{2 . \pi} . \ln(z)$$

$$v = \frac{Q}{2 . \pi . r} . e^{i\varphi} = \frac{Q}{2 . \pi . r} . (cos\varphi + i . sin\varphi)$$

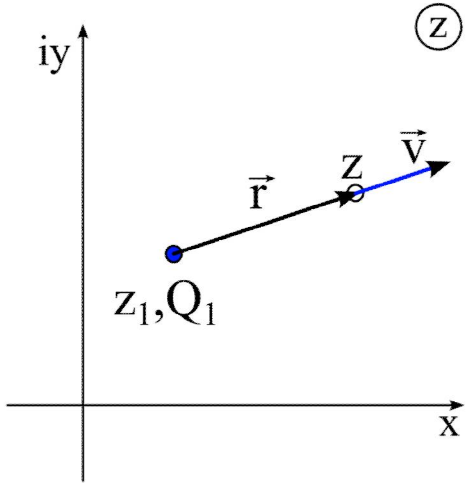
Obsah

Jednoduché proudové útvary – zdroj/propad

Jak to vypadá v případě, že je zdroj umístěn mimo počátek?

Funkce komplexního potenciálu má tvar:

$$W_2 = \frac{Q}{2.\pi}.\ln(z - z_1)$$



Komplexně sdružená rychlost

$$\overline{v} = \frac{\partial W_2}{\partial z} = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{\partial}{\partial z}[\ln(z - z_1)] \quad = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{1}{(z - z_1)}$$

$$\overline{v} = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{1}{z_r} \quad = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{\overline{z}_r}{r^2}$$

$$v = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{z_r}{r^2} \quad = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{r.e^{i.\varphi}}{r^2} \quad = \frac{Q}{2.\pi.r}.\frac{x_r + i.y_r}{r}$$

Obsah

Jednoduché proudové útvary – zdroj/propad

Jak to bude vypadat v případě, že nebudeme pracovat v komplexní rovině?

Nemůžeme pracovat s funkcí komplexního potenciálu a tak pracujeme pouze s rychlostí

Složky rychlostí

$$v_1 = \frac{Q}{2.\pi.r}.cos\varphi \qquad = \frac{Q}{2.\pi.r}.\frac{x'_1 - x_1}{r}$$

$$v_2 = \frac{Q}{2.\pi.r}.sin\varphi \qquad = \frac{Q}{2.\pi.r}.\frac{x'_2 - x_2}{r}$$

$$v_i = \frac{Q}{2.\pi.r}.\frac{x'_i - x_i}{r} \qquad = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{x'_i - x_i}{r^2} \qquad = \frac{Q}{2.\pi}.\frac{r_i}{r^2}$$

Jednoduché proudové útvary – zdroj/propad

Jak je to v případě, že máme více zdrojů?

Platí princip superpozice! Proč?

$$W = \sum_{j=1}^{N} W_{(j)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{(j)}}{2.\pi}.\ln(z - z_{(j)})$$

$$\bar{v} = \frac{d}{dz}\sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{(j)}}{2.\pi}.\ln(z - z_{(j)}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{(j)}}{2.\pi}.\frac{1}{\left(z - z_{(j)}\right)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{(j)}}{2.\pi}.\frac{1}{r_{(j)}.e^{i.\varphi_{(j)}}}$$

$$v = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{(j)}}{2.\pi}.\frac{e^{i.\varphi_{(j)}}}{r_{(j)}}$$

Obsah

Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

Vycházíme z následující funkce komplexní proměnné.

$$W_3 = i.y_a.\ln(z)$$

Tuto funkci rozdělíme na reálnou a imaginární část.

$$W_3 = i.y_a.\ln\left(r.e^{i\varphi}\right) = -y_a.\varphi + i.y_a.\ln(r)$$

Potenciál rychlosti

$$\phi = -y_a.\varphi$$

Proudová funkce

$$\psi = y_a.\ln(r)$$

Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

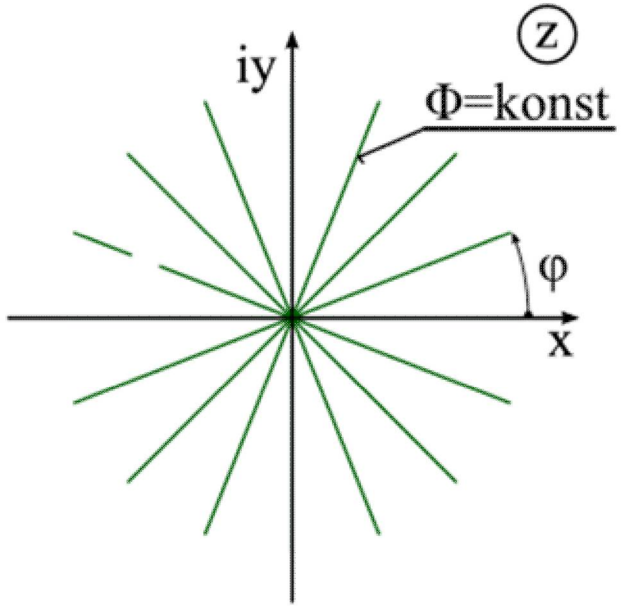
Potenciál rychlosti

$$\phi = -y_a . \varphi$$

V případě ekvipotenciály je Φ konstanta

$$\varphi = \frac{\phi}{-y_a} = konst$$

Ekvipotenciály jsou tedy paprsky jdoucí z počátku.



Obsah

Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

Proudová funkce

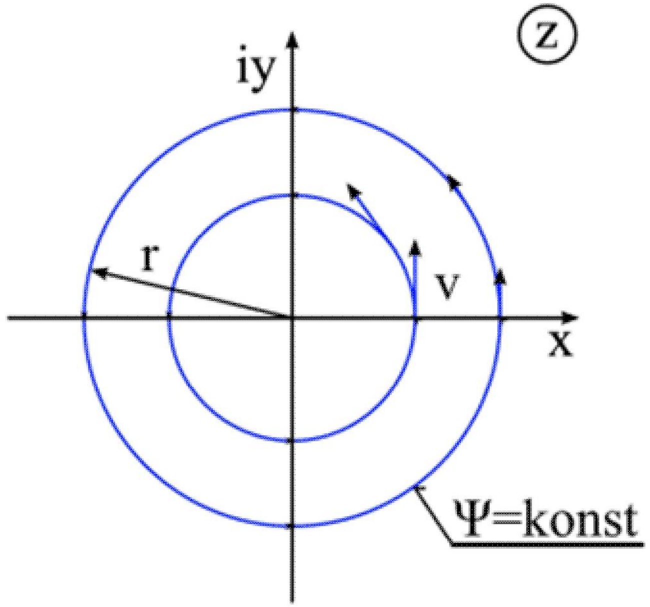
$$\psi = y_a . \ln(r)$$

V případě proudnice je Ψ konstanta

$$\ln(r) = \frac{\psi}{y_a}$$

$$r = e^{\frac{\psi}{y_a}}$$

Proudnice jsou čáry s konstantním poloměrem r – tedy kružnice kolem počátku.



Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

Určení indukované rychlosti

$$\bar{v} = \frac{\partial W_3}{\partial z} = i.\, y_a.\frac{1}{z} = e^{i\frac{\pi}{2}}.\frac{y_a}{r} e^{-i\varphi}$$

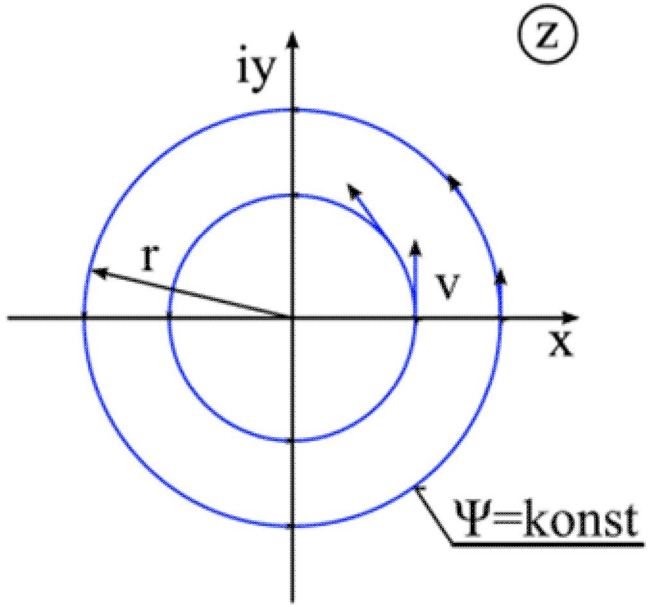
$$\bar{v} = \frac{y_a}{r} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

$$v = \frac{y_a}{r} e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Pokud je y_a kladné, pak je rychlost tečná k proudnici a je orientovaná po směru hodinových ručiček což je v opačném směru než je orientace uzavřené křivky, kterou tvoří proudnice.

Jednotkový tečný vektor v **kladném směru** ke kružnici je dán vztahem

$$\tau = e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$$



Obsah

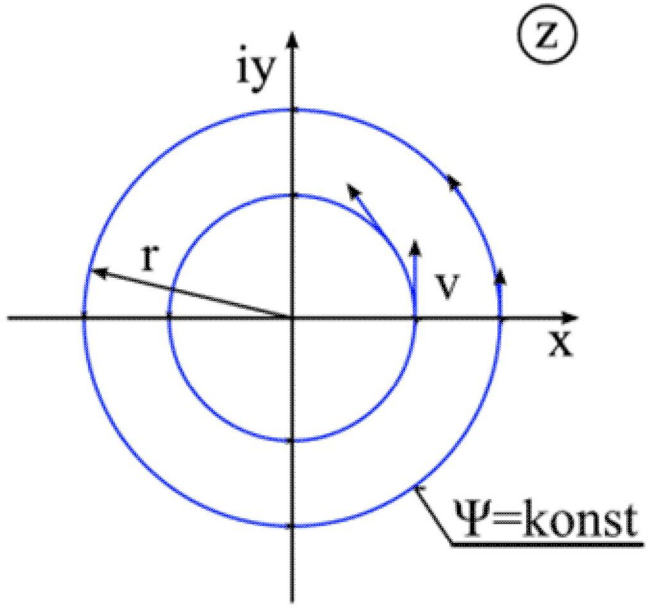
Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

Složky rychlosti

$$v_x = \frac{y_a}{r} cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad v_y = \frac{y_a}{r} sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Složky jednotkového tečného vektoru ke kružnici

$$\tau_x = cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \tau_y = sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$



Nyní můžeme vyjádřit

$$cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = sin(\varphi) \qquad sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -cos(\varphi)$$

$$cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -sin(\varphi) \qquad sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = cos(\varphi)$$

Cirkulaci kolem potenciálního víru
můžeme tedy vyjádřit:

$$\Gamma = \int_k \vec{v}.\vec{\tau}\,.\,dk$$

Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

Element kružnice je

$$dk = r.d\varphi$$

Takže cirkulace po proudnici, která má tvar kružnice je:

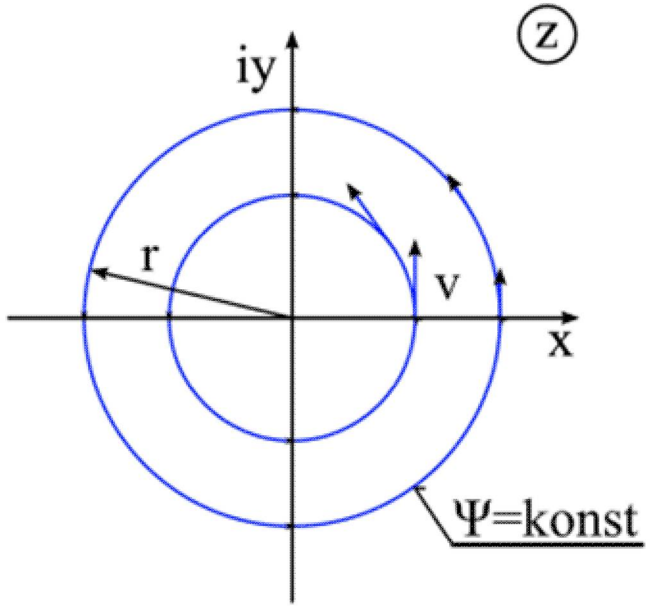
$$\Gamma = \int_0^{2.\pi} (v_x.\tau_x + v_y.\tau_y).r.d\varphi$$

Nyní můžeme vyjádřit

$$\Gamma = -\int_0^{2.\pi} \frac{y_a}{r}.\left(sin^2(\varphi) + cos^2(\varphi)\right).r.d\varphi$$

$$\Gamma = -y_a \int_0^{2.\pi} d\varphi = -y_a.2.\pi$$

$$y_a = -\frac{\Gamma}{2.\pi}$$



Z tohoto vztahu také vyplývá, že cirkulace po libovolné kružnici kolem víru je konstantní.

Obsah

Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

Funkce komplexního potenciálu pro potenciální vír je dána vztahem:

$$W_3 = -\frac{i.\Gamma}{2.\pi}.\ln(z)$$

Potenciál rychlosti a proudová funkce má tvar:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2.\pi}.\varphi$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2.\pi}.\ln(r)$$

Rychlost indukovaná potenciálním vírem je:

$$v = -\frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\pi}\frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}$$

$$v_x = \frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}sin(\varphi)$$

$$v_y = \frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = \frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}cos(\varphi)$$

Jednoduché proudové útvary – potenciální vír

Vyjádření složek rychlosti vyvolaných potenciálním prouděním kolem víru, pomocí sumační symboliky.

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}sin(\varphi) \qquad v_y = \frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}cos(\varphi)$$

$$v_1 = -\frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}\frac{x'_2 - x_2}{r} \qquad v_2 = \frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}\frac{x'_1 - x_1}{r}$$

$$v_i = \frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r^2}.\varepsilon_{i3k}.(x'_k - x_k)$$

Jednoduché proudové útvary – dvojice

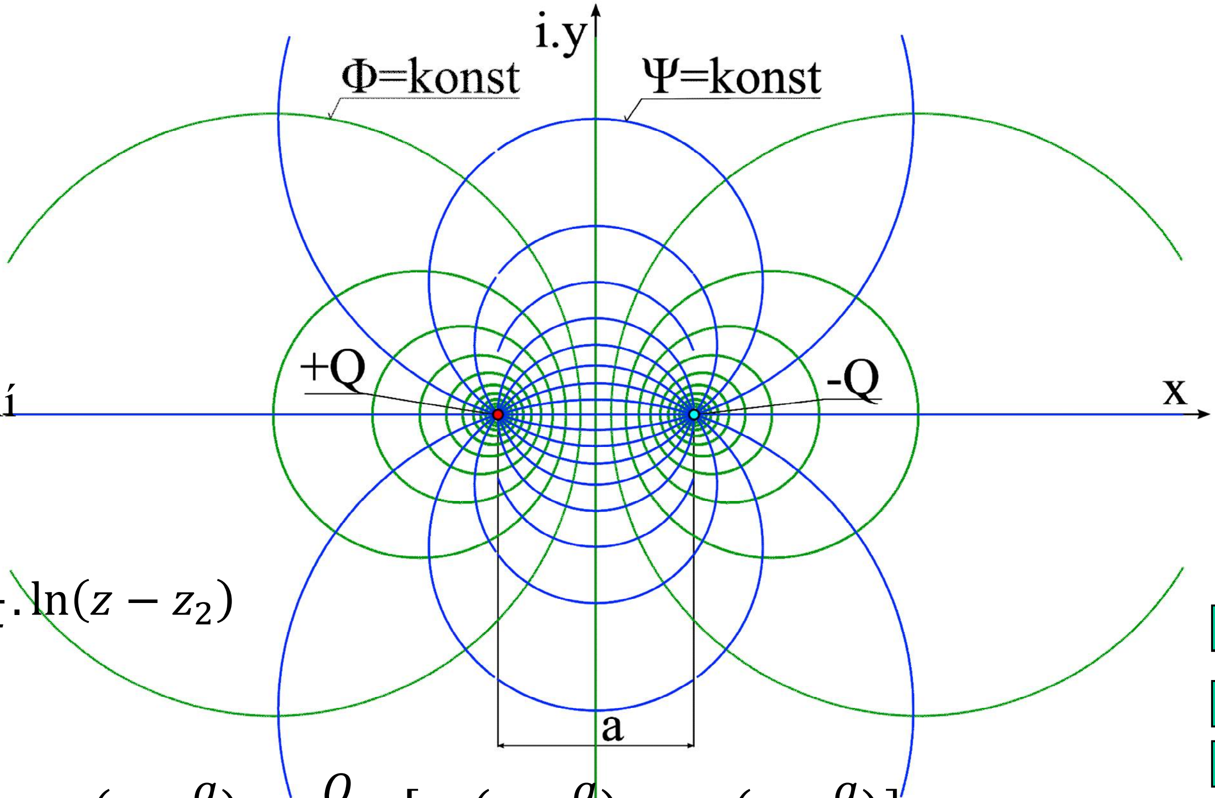
Máme zdroj a propad podle obrázku. Jejich parametry jsou následující.

Zdroj

$$z_1 = -\frac{a}{2} \qquad Q_1 = Q$$

Propad

$$z_2 = \frac{a}{2} \qquad Q_2 = -Q$$



Funkce komplexního potenciálu pro dané proudění

$$W = W_1 + W_2$$

$$W = \frac{Q_1}{2.\pi}.\ln(z - z_1) + \frac{Q_2}{2.\pi}.\ln(z - z_2)$$

$$W = \frac{Q}{2.\pi}.\ln\left(z + \frac{a}{2}\right) - \frac{Q}{2.\pi}.\ln\left(z - \frac{a}{2}\right) = \frac{Q}{2.\pi}.\left[\ln\left(z + \frac{a}{2}\right) - \ln\left(z - \frac{a}{2}\right)\right]$$

$$W = \frac{Q}{2.\pi}.ln\frac{\left(z + \frac{a}{2}\right)}{\left(z - \frac{a}{2}\right)}$$

Moment dvojice $M = Q.a$

Obsah

Jednoduché proudové útvary – dipól

Vyjádření složek rychlosti vyvolaných potenciálním prouděním kolem víru, pomocí sumační symboliky.

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2.\pi}\frac{1}{r}sin(\varphi)$$