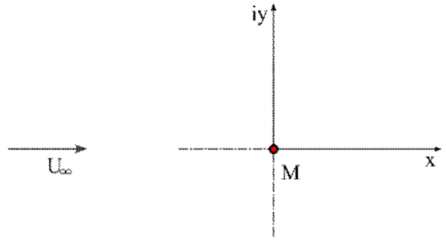
Potenciální proudění

Obtékání válce

Zkoumejme následující funkci
komlexního potenciálu

$$W = U_\infty . z + \frac{M}{2.\pi} . \frac{1}{z}$$



Funkci komplexního potenciálu rozložíme
na reálnou a imaginární část

$$W = U_\infty . r . (\cos\varphi + i.\sin\varphi) + \frac{M}{2.\pi} . \frac{1}{r} (\cos\varphi - i.\sin\varphi)$$

$$W = U_\infty . r . \cos\varphi + \frac{M}{2.\pi} . \frac{1}{r} . \cos\varphi + i . \left(U_\infty . r . \sin\varphi - \frac{M}{2.\pi} . \frac{1}{r} . \sin\varphi \right)$$

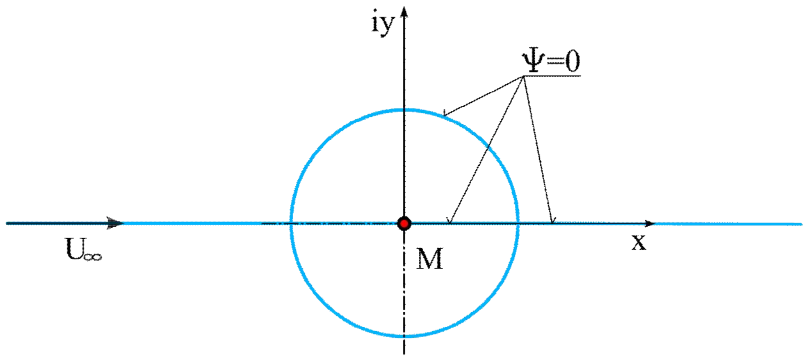
$$\Phi = \frac{U_\infty}{r} \left(r^2 + \frac{M}{2.\pi . U_\infty} \right) . \cos\varphi$$

$$\Psi = \frac{U_\infty}{r} . \left(r^2 - \frac{M}{2.\pi . U_\infty} \right) . \sin\varphi$$

Jestli je to potenciální proudění kolem válce pak musí existovat proudnice tvaru kružnice.
Jde o to jakou hodnotu má proudová funkce na této proudnici.

Pokud je to obtékání válce, pak bychom měli najít proudnici, která má tvar kruhu.

$$\Psi = U_\infty.\left(1 - \frac{M}{2.\pi.U_\infty}\frac{1}{r^2}\right).r.\sin\varphi$$



Je-li proudová funkce rovna nule, pak dostáváme

$$\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = U_\infty.\left(1 - \frac{M}{2.\pi.U_\infty}\frac{1}{r^2}\right).r.\sin\varphi$$

Předchozí rovnice je splněna pro následující případy.

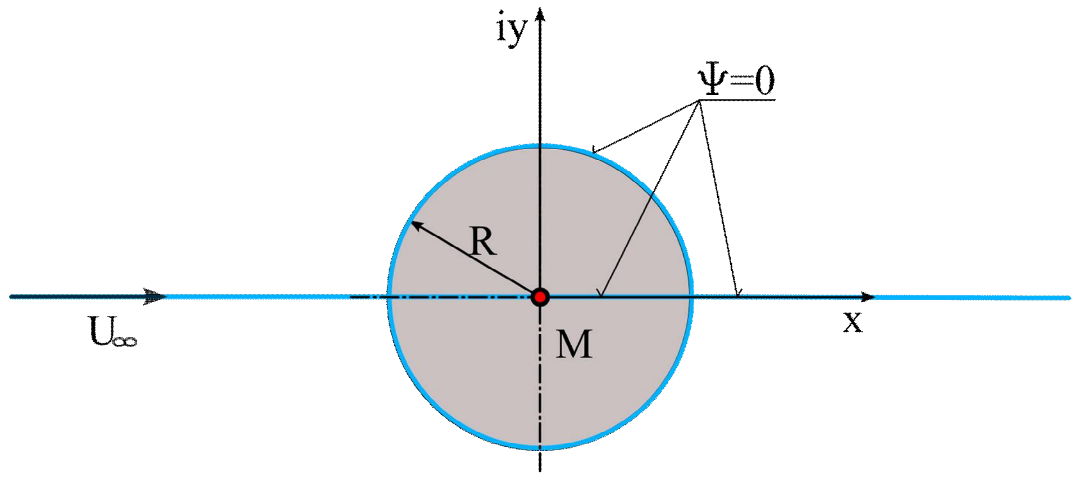
$$r^2 = \frac{M}{2.\pi.U_\infty} \qquad\qquad y = 0$$

Z předchozího můžeme vyjádřit velikost momentu dipólu pro daný poloměr válce R

$$M = R^2.2.\pi.U_\infty$$

Tento poloměr označíme jako R je to poloměr válce. Funkce komplexního potenciálu pro obtékání nerotujícího válce má potom tvar.

$$M = R^2.2.\pi.U_\infty \qquad W = U_\infty.z + R^2.U_\infty.\frac{1}{z} = U_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$$

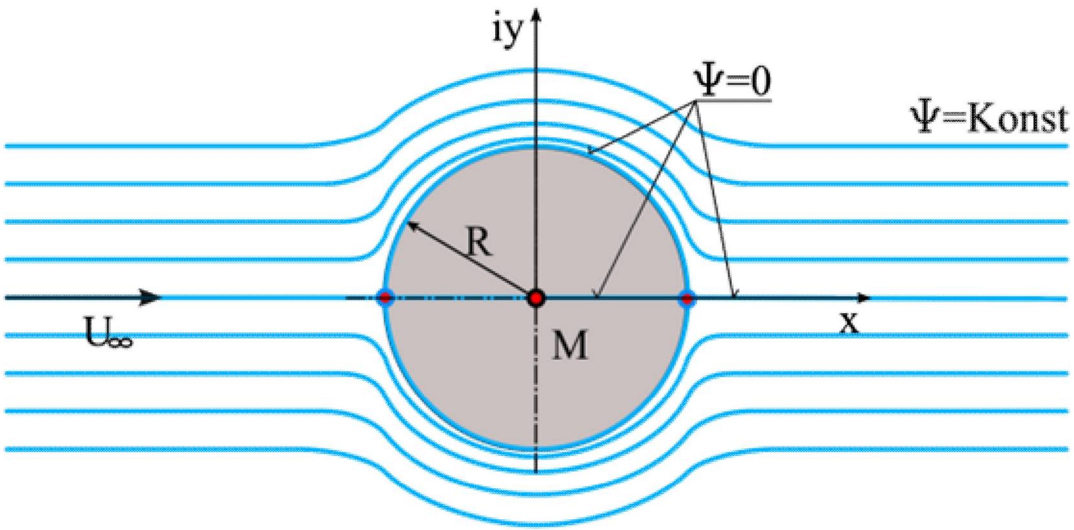


Funkce potenciálu rychlosti a proudová funkce mají pak tvar

$$\Phi = U_\infty\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right).r.cos\,\varphi \qquad \Psi = U_\infty.\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).r.sin\,\varphi$$

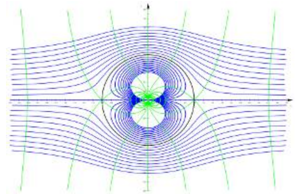
Určení kritických bodů.

$$\bar{v} = \frac{\partial W}{\partial z} = U_{\infty} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(z + \frac{R^2}{z} \right) = U_{\infty} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) = 0$$



Kritické body jsou určeny z předchozí rovnice

$$U_{\infty} \cdot \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm R$$



Rychlost na povrchu válce.

Komplexně sdruženou rychlost můžeme pro toto proudění vyjádřit následujícím vztahem

$$\bar{v} = \frac{\partial w}{\partial z} = U_{\infty}.\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)$$

Povrch válce je dán rovnicí

$$z = R.e^{i\varphi}$$

Rychlost na povrchu válce můžeme tedy vyjádřit

$$\bar{v}_v = U_{\infty}.\left(1 - \frac{R^2}{R^2.e^{i2.\varphi}}\right)$$

$$\bar{v}_v = U_{\infty}.2.\sin\varphi.e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

$$v_v = U_{\infty}.2.\sin\varphi.e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

$$\left|v_v\right| = U_{\infty}.2.\sin\varphi$$

Rozložení tlaku na povrchu válce

Tlak na povrchu válce určíme pomocí Lagrangeova integrálu pro případ ustáleného proudění

$$\frac{U_\infty^2}{2}+\frac{p_\infty}{\rho}=\frac{v_v^2}{2}+\frac{p_v}{\rho}$$

Velikost rychlosti na povrchu válce známe můžeme tedy vyjádřit její kvadrát.

$$v_v^2=\left(U_\infty.2.sin\,\varphi\right)^2=4.U_\infty^2.sin^2\varphi$$

Pak tlak na povrchu válce je dán vztahem.

$$p_v=p_\infty+\frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2-v_v^2\right)=p_\infty+\frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2-4.U_\infty^2.sin^2\varphi\right)$$

Síla působící na nerotující válec

Elementární síla, vyvolaná tlakem na povrchu válce, je dána vztahem

$$d\vec{F} = p_v.\vec{n}.dS$$

$$\vec{n} = (-\cos\varphi, \quad -\sin\varphi) \qquad\qquad dS = R.d\varphi.1$$

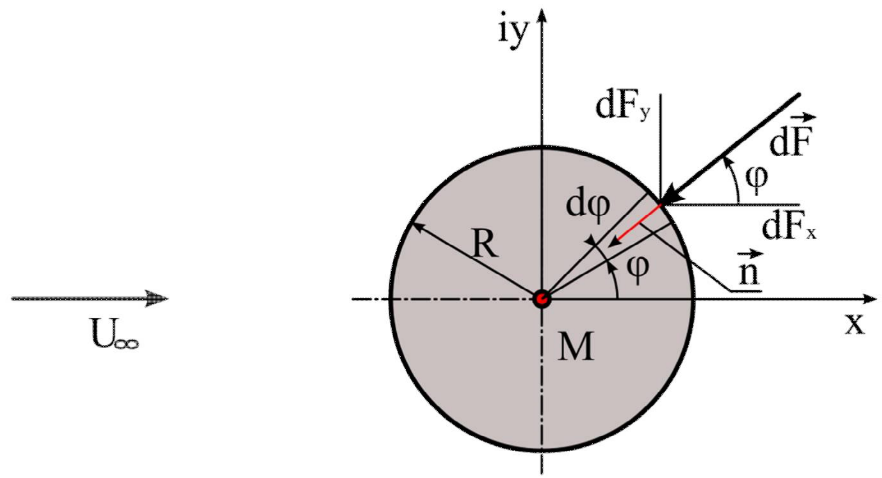
Celkovou sílu vypočítáme integrací

$$\vec{F} = \int_S p_v.\vec{n}.dS = \int_0^{2.\pi} p_v.\vec{n}.R.d\varphi$$

Musíme to řešit po složkách

$$F_x = -\int_0^{2.\pi} p_v.\cos\varphi.R.d\varphi$$

$$F_y = -\int_0^{2.\pi} p_v.\sin\varphi.R.d\varphi$$



Síla působící na nerotující válec

Takže dostáváme

$$F_x = -\int_0^{2.\pi}\left[p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2 - 4.U_\infty^2.sin^2\varphi\right)\right].cos\,\varphi.R.d\varphi$$

$$F_y = -\int_0^{2.\pi}\left[p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2 - 4.U_\infty^2.sin^2\varphi\right)\right].sin\,\varphi.R.d\varphi$$

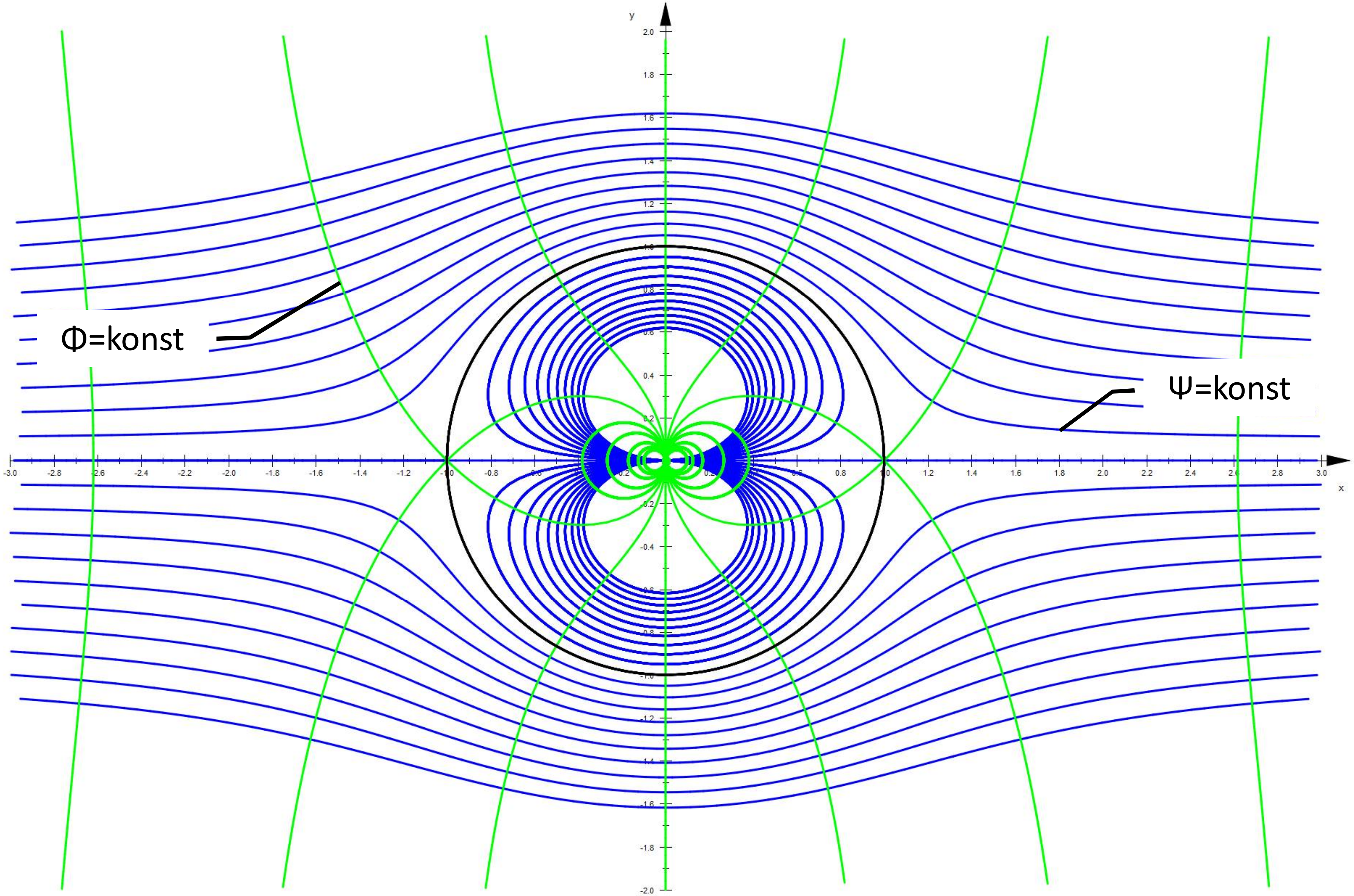
Vystupují zde následující integrály

$$\int_0^{2.\pi}\cos\varphi.d\varphi \quad = 0 \qquad\qquad \int_0^{2.\pi}\sin\varphi.d\varphi \quad = 0$$

$$\int_0^{2.\pi}\cos\varphi.\sin^2\varphi.d\varphi = \int_0^{2.\pi}\left(\cos\varphi - \cos^3\varphi\right)d\varphi \;= 0 \qquad\qquad \int_0^{2.\pi}\sin^3\varphi.d\varphi = 0$$

$$\mathrm{F_x} = 0$$

$$F_y = 0$$



Φ=konst
Ψ=konst