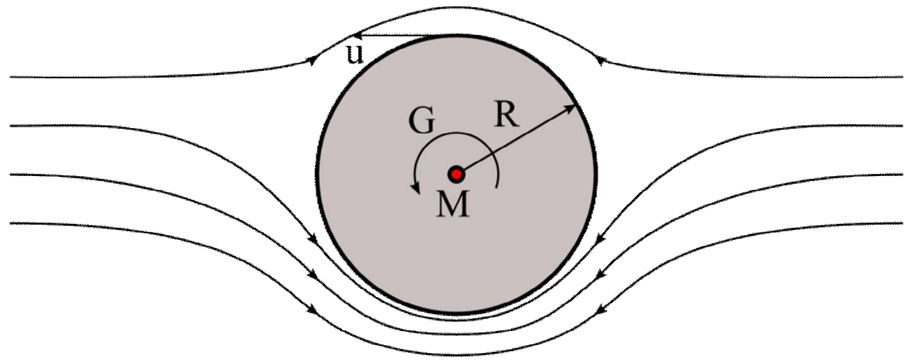
Potenciální proudění

Obtékání rotujícího válce

Funkce komplexního potenciálu

$$w = U_\infty . z + U_\infty . \frac{R^2}{z} - \frac{i.\Gamma}{2.\pi}.\ln z$$



Funkci komplexního potenciálu rozložíme na reálnou a imaginární část

$$w = U_\infty . r.(\cos\varphi + i.\sin\varphi) + U_\infty . \frac{R^2}{r}(\cos\varphi - i.\sin\varphi) - \frac{i.\Gamma}{2.\pi}.\ln z$$

$$w = U_\infty . r.\cos\varphi + U_\infty . \frac{R^2}{r}.\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2.\pi}.\varphi + i.\left(U_\infty . r.\sin\varphi - U_\infty . \frac{R^2}{r}.\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2.\pi}.\ln r \right)$$

$$\Phi = \frac{U_\infty}{r}\left(r^2 + R^2\right).\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2.\pi}.\varphi$$

$$\Psi = \frac{U_\infty}{r}.\left(r^2 - R^2\right).\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2.\pi}.\ln r$$

Dosazením r=R zjistíme, že proudnice ve tvaru kružnice má hodnotu proudové funkce

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2.\pi}.\ln R$$

Určení kritických bodů

$$\overline{v} = \frac{\partial w}{\partial z} = U_\infty - U_\infty . \frac{R^2}{z^2} - \frac{i.\Gamma}{2.\pi} . \frac{1}{z} = 0$$

Jedná se o kvadratickou rovnici

$$U_\infty z^2 - \frac{i.\Gamma}{2.\pi}.z \ - U_\infty .R^2 = 0$$

Řešení této rovnice budeme hledat ve tvaru

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \qquad a = U_\infty \qquad b = -\frac{i.\Gamma}{2.\pi} \qquad c = -U_\infty .R^2$$

Pak tedy dostáváme

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4.\pi.U_\infty} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{16.\pi^2.U_\infty^2} + R^2}$$

Mohou nastat následující případy

$$\left|\Gamma\right| < R.4.\pi.U_\infty$$

$$\left|\Gamma\right| = R.4.\pi.U_\infty$$

$$\left|\Gamma\right| > R.4.\pi.U_\infty$$

Případ kdy: $\left|\Gamma\right| < R.4.\pi.U_{\infty}$

V tomto případě je diskriminant kladný, řešení můžeme najít ve tvaru

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16.\pi^2.U_{\infty}^2}} + \frac{i\Gamma}{4.\pi.U_{\infty}}$$

Je třeba si uvědomit

Kritické body budou pravděpodobně ležet na kružnici

Poloha kritických bodů je komplexní číslo, které je možné vyjádřit ve tvaru

$$z_{1,2} = R.e^{i\varphi} = R.\cos\varphi + iR.\sin\varphi$$

Porovnáním imaginární části dostaneme

$$\sin\varphi = \frac{\Gamma}{4.\pi.U_{\infty}.R}$$

Po dosazení do vztahu pro kořeny kvadratické rovnice dostaneme

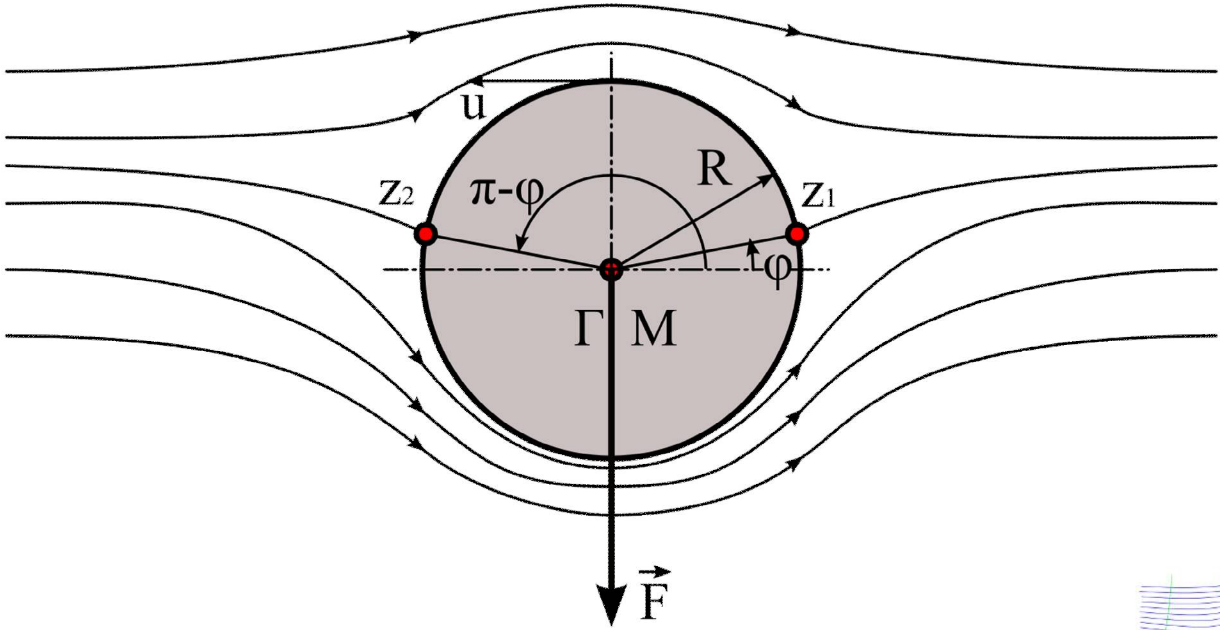
$$z_{1,2} = \pm R.\cos\varphi + i.R\ \sin\varphi$$

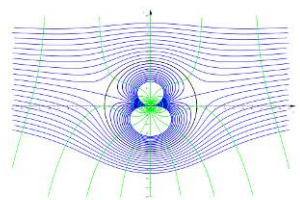
Případ kdy: $\left|\Gamma\right| < R\ 4.\pi\ .U_{\infty}$

Tedy:

$$z_1 = R.\cos\varphi + i.R\sin\varphi = R.e^{i\varphi}$$

$$z_2 = -R.(\cos\varphi - i\sin\varphi) = -R.e^{-i\varphi} = R.e^{i(\pi-\varphi)}$$

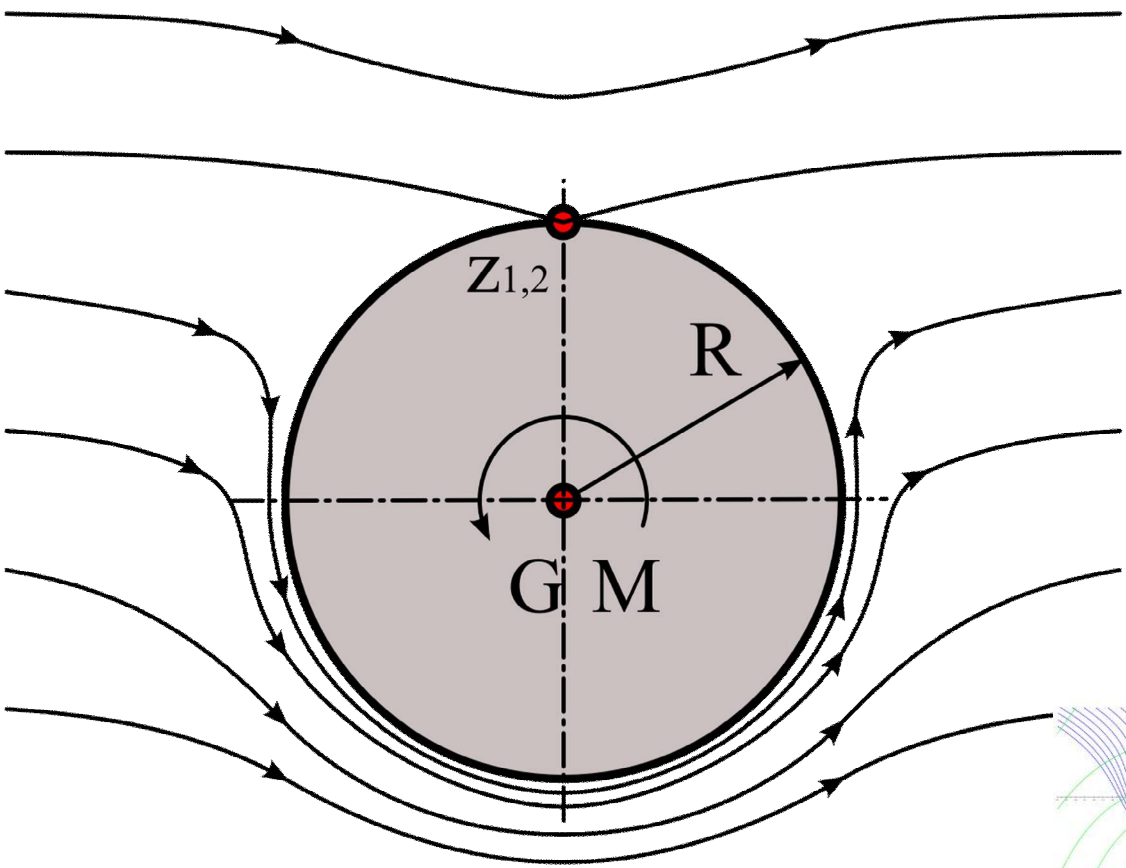


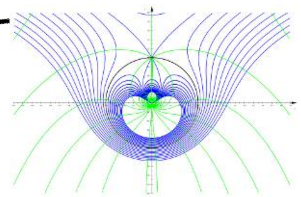


Případ kdy: $\left|\Gamma\right| = R.4.\pi.U_\infty$

V tomto případě je diskriminant nulový a dostáváme dvojnásobný kořen. Je to ryze imaginární číslo

$$z_{1,2} = \frac{i\Gamma}{4.\pi.U_\infty} = \frac{iR.4.\pi.U_\infty}{4.\pi.U_\infty}.sign(\Gamma) = i.R.sign(\Gamma)$$





Případ kdy: $\left|\Gamma\right| > R.4.\pi\ .U_\infty$

V tomto případě je diskriminant záporný. Dostáváme dva ryze imaginární kořeny kvadratické rovnice

$$z_1 = \frac{i\Gamma}{4.\pi.U_\infty} + i\sqrt{\left(\frac{\Gamma^2}{16.\pi^2.U_\infty^2} - R^2\right)}$$

$$z_2 = \frac{i\Gamma}{4.\pi.U_\infty} - i\sqrt{\left(\frac{\Gamma^2}{16.\pi^2.U_\infty^2} - R^2\right)}$$

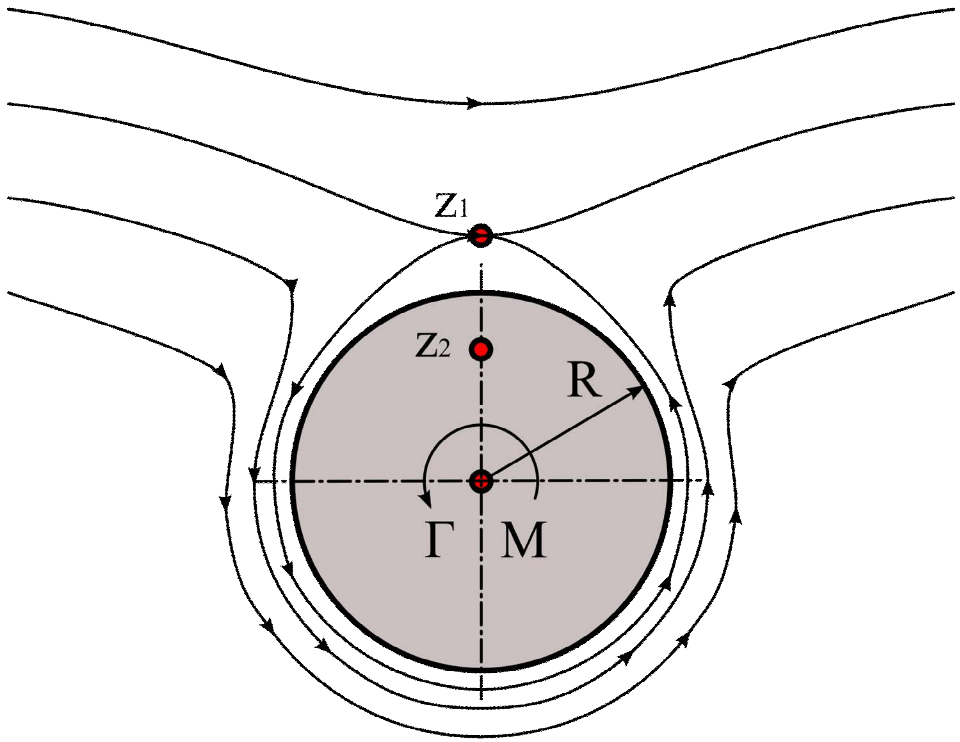
Pokud tyto dva kořeny vynásobíme tak dostaneme:

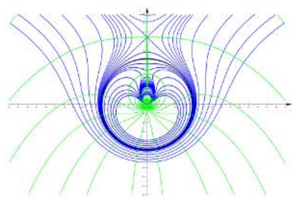
$$z_1.z_2 = i^2\left[\frac{\Gamma^2}{16.\pi^2.U_\infty^2} - \frac{\Gamma^2}{16.\pi^2.U_\infty^2} + R^2\right] = -R^2$$

To se velice podobá výsledku jako když násobíme kruhově inverzní číslo s Původním komplexním číslem

$$z.z_{ki} = z.\frac{R^2}{z} = R^2$$

Proudnice pak mají tvar





Rychlost na povrchu válce.

Komplexně sdruženou rychlost můžeme pro toto proudění vyjádřit následujícím vztahem

$$\overline{v} = \frac{\partial w}{\partial z} = U_{\infty}.\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - \frac{i.\Gamma}{2.\pi}.\frac{1}{z}$$

Povrch válce je dán rovnicí

$$z = R.e^{i\varphi}$$

Rychlost na povrchu válce můžeme tedy vyjádřit

$$\overline{v}_v = U_{\infty}.\left(1 - \frac{R^2}{R^2.e^{i2.\varphi}}\right) - \frac{i.\Gamma}{2.\pi}.\frac{1}{R\ .e^{i.\varphi}}$$

$$\overline{v}_v = \left(U_{\infty}.2.\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2.\pi}.\frac{1}{R}\right).e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

$$v_v = \left(U_{\infty}.2.\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2.\pi}.\frac{1}{R}\right).e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

$$\left|v_v\right| = \left(U_{\infty}.2.\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2.\pi}.\frac{1}{R}\right)$$

Rozložení tlaku na povrchu válce

Tlak na povrchu válce určíme pomocí Lagrangeova integrálu pro případ ustáleného proudění

$$\frac{U_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \frac{v_v^2}{2} + \frac{p_v}{\rho}$$

Velikost rychlosti na povrchu válce známe můžeme tedy vyjádřit její kvadrát.

$$v_v^2 = \left(U_\infty.2.\sin\varphi - \frac{\Gamma}{2.\pi}.\frac{1}{R} \right)^2 = 4.U_\infty^2.\sin^2\varphi - 2.U_\infty.\sin\varphi.\frac{\Gamma}{\pi R} + \frac{\Gamma^2}{4.\pi^2.R^2}$$

Pak tlak na povrchu válce je dán vztahem.

$$p_v = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2 - v_v^2\right) = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2 - 4.U_\infty^2.\sin^2\varphi + 2.U_\infty.\sin\varphi.\frac{\Gamma}{\pi R} - \frac{\Gamma^2}{4.\pi^2.R^2} \right)$$

Síla působící na rotující válec

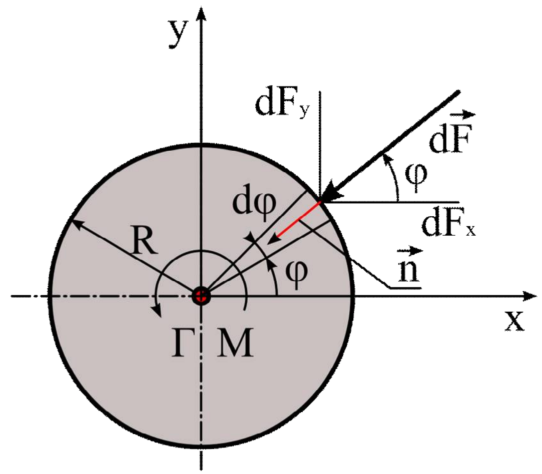
Elementární síla, vyvolaná tlakem na povrchu válce, je dána vztahem

$$d\vec{F} = p_v.\vec{n}.dS$$

$$\vec{n} = (-\cos\varphi, \quad -\sin\varphi) \qquad dS = R.d\varphi.1$$

Celkovou sílu vypočítáme integrací

$$\vec{F} = \int_S p_v.\vec{n}.dS = \int_0^{2.\pi} p_v.\vec{n}.R.d\varphi$$



Musíme to řešit po složkách

$$F_x = -\int_0^{2.\pi} p_v.\cos\varphi.R.d\varphi$$

$$F_y = -\int_0^{2.\pi} p_v.\sin\varphi.R.d\varphi$$

Síla působící na rotující válec

Takže dostáváme

$$F_x = -\int_0^{2.\pi}\left[p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2 - 4.U_\infty^2.\sin^2\varphi + 2.U_\infty.\sin\varphi.\frac{\Gamma}{\pi R} - \frac{\Gamma^2}{4.\pi^2.R^2}\right)\right].\cos\varphi.R.d\varphi$$

$$F_y = -\int_0^{2.\pi}\left[p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(U_\infty^2 - 4.U_\infty^2.\sin^2\varphi + 2.U_\infty.\sin\varphi.\frac{\Gamma}{\pi R} - \frac{\Gamma^2}{4.\pi^2.R^2}\right)\right].\sin\varphi.R.d\varphi$$

Vystupují zde následující integrály

$$\int_0^{2.\pi}\cos\varphi.d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2.\pi}\sin\varphi.d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2.\pi}\cos\varphi.\sin^2\varphi.d\varphi = \int_0^{2.\pi}\left(\cos\varphi - \cos^3\varphi\right)d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2.\pi}\sin^3\varphi.d\varphi = 0$$

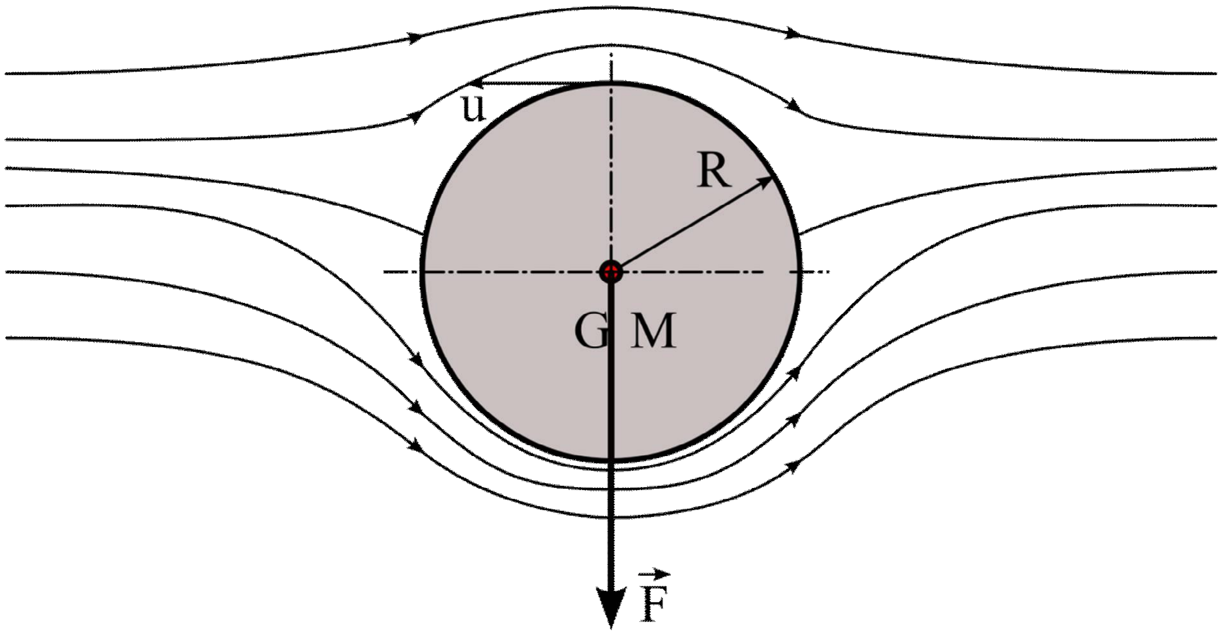
$$\int_0^{2.\pi}\cos\varphi.\sin\varphi.d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2.\pi}\sin^2\varphi.d\varphi = \pi$$

Síla působící na rotující válec

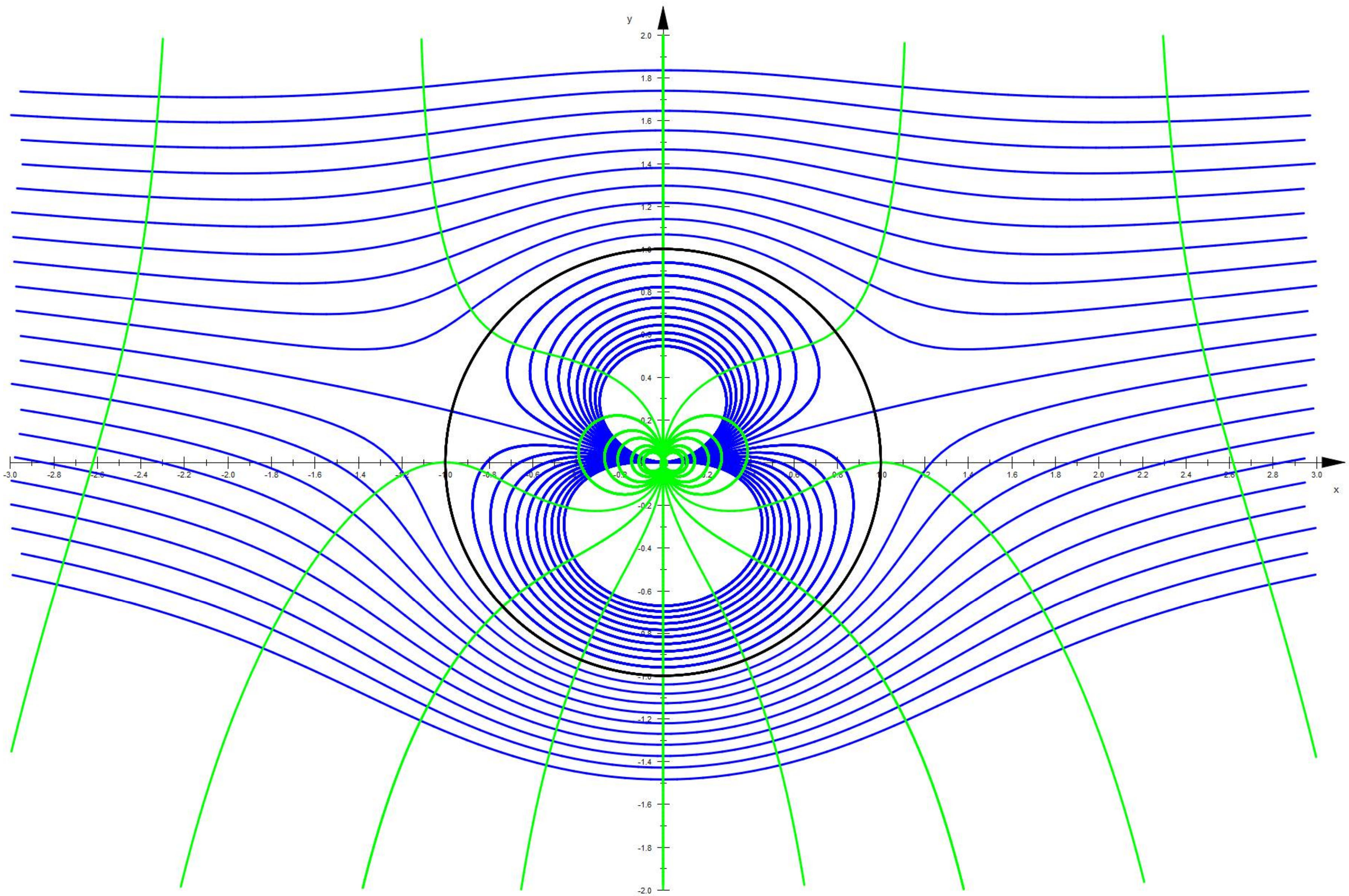
Takže dostáváme

$$F_x = 0$$

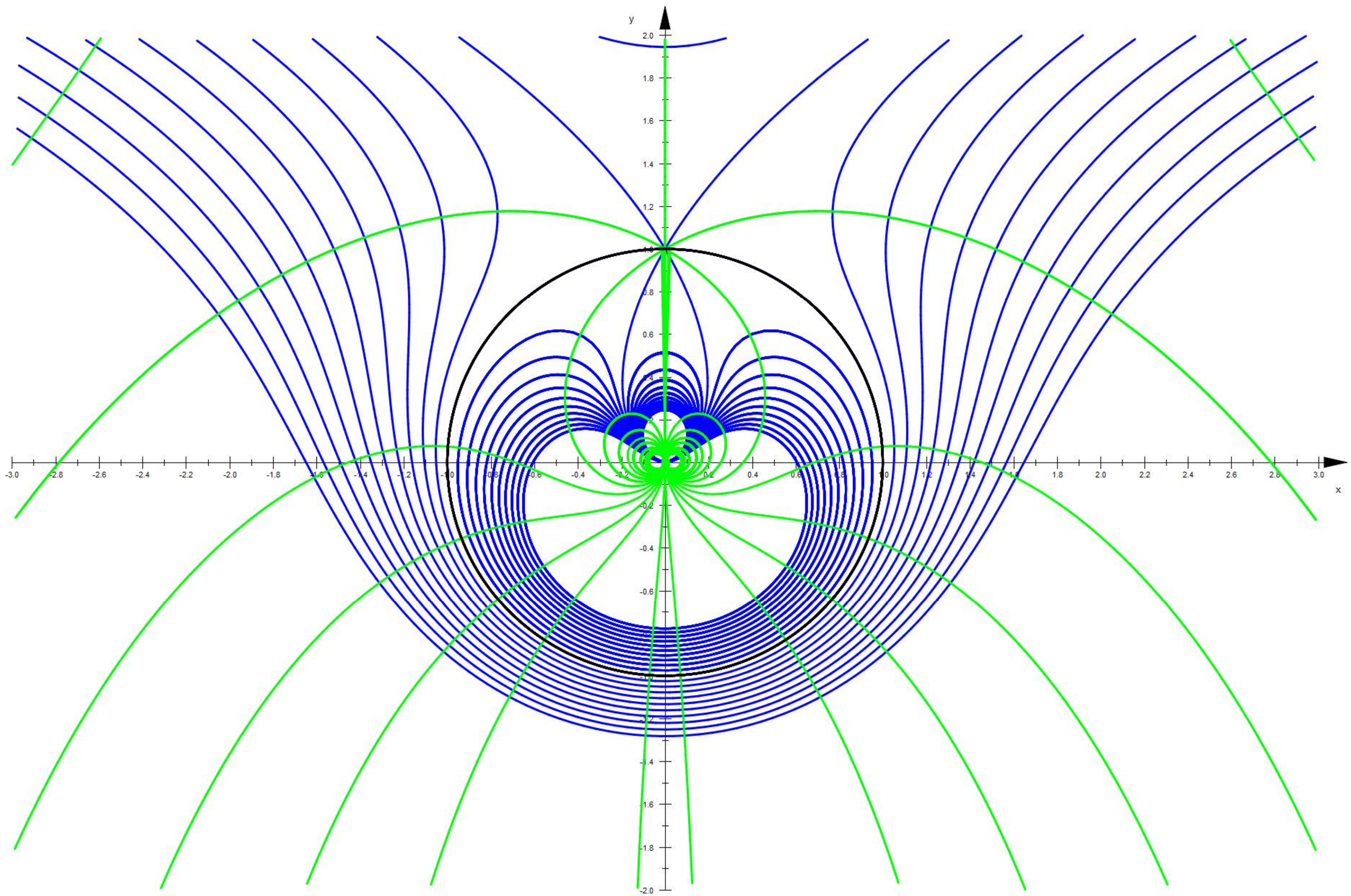
$$F_y = -\rho.U_\infty.\Gamma$$

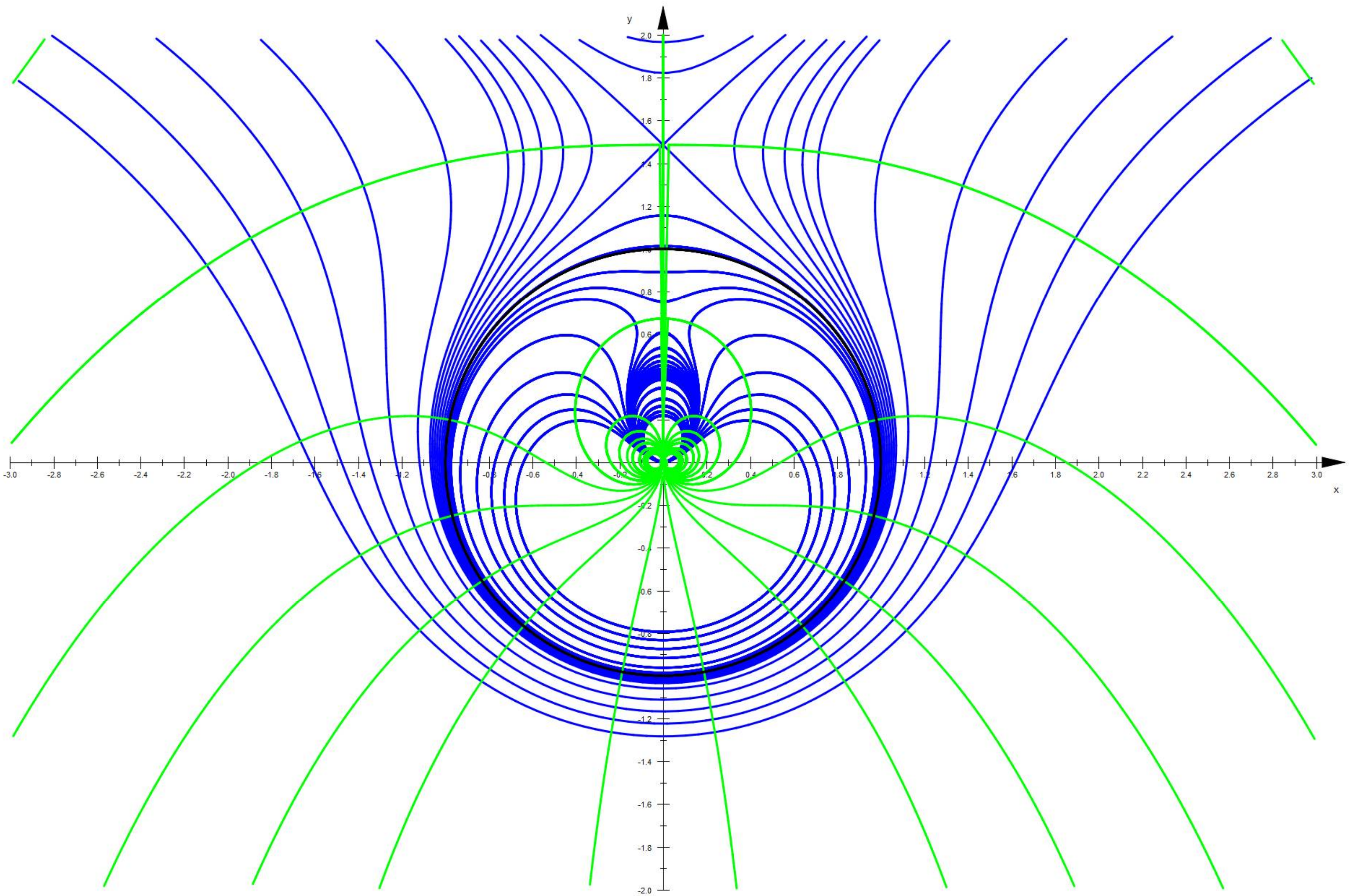


Konec



y
x


y
x
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
0.6
-0.2
-0.4
-0.6
-1.4
-1.6
-1.8
-2.0
-3.0
-2.8
-2.6
-2.4
-2.2
-2.0
-1.8
-0.6
-0.4
0.2
0.4
1.0
1.2
1.4
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
2.8
3.0



y
x