

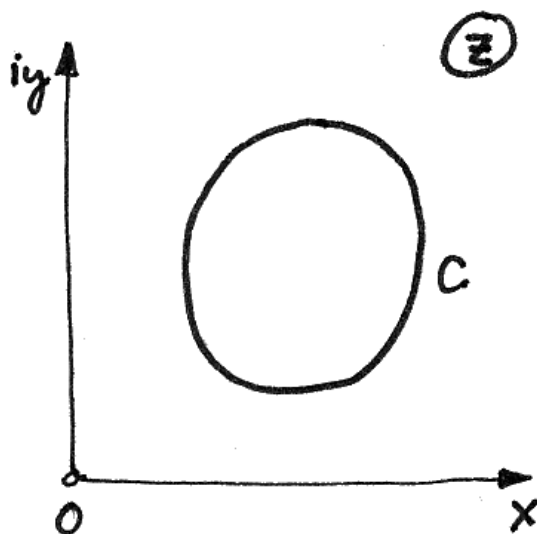
Potenciální proudění

Konformní zobrazení

Máme dvě komplexní roviny

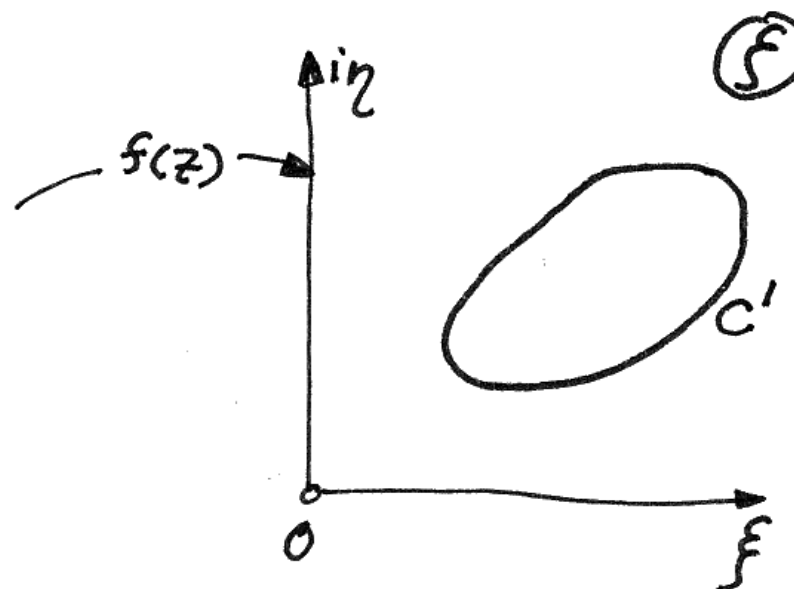
Komplexní rovina z

$$z = x + iy$$



Komplexní rovina ζ

$$\zeta = \xi + i\eta$$



Konformní zobrazení je zobrazení z jedné komplexní roviny z do druhé komplexní roviny ζ .

$$\zeta = f(z)$$

Tato funkce nabývá zvláštního charakteru, jestliže je analytická. (Splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky.)

Pro zobrazení z jedné komplexní roviny do druhé by mělo platit

Uvnitř a na hranici uvažované oblasti je funkce $f(z)$ je **holomorfní**.

To znamená, že existuje derivace

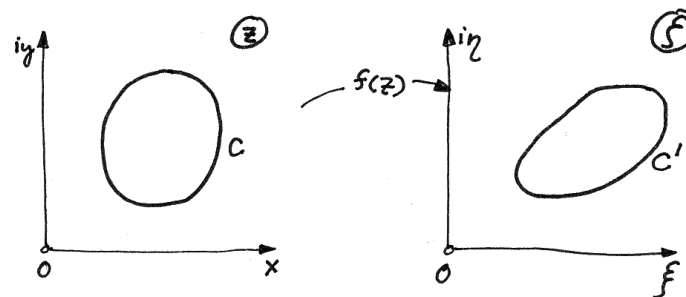
$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{df(z)}{dz}$$

Na hranici oblasti neexistují dva body z_1 a z_2 v nichž by funkce $f(z)$ nabývala stejných hodnot.

$$f(z_1) \neq f(z_2)$$

Pro všechny body hranice platí

$$\frac{df(z)}{dz} \neq 0$$



Kromě jiného pro toto zobrazení platí následující

Obíháme-li hranici C v kladném smyslu, pak i hranice C' je obíhána v kladném smyslu.

Leží-li bod z_0 uvnitř oblasti C v rovině z , pak leží i ζ_0 uvnitř oblasti C' v rovině ζ .

Zobrazení je jednoznačné, každému bodu uvnitř oblasti C v rovině z přísluší právě jeden bod uvnitř oblasti C' v rovině ζ a naopak. Totéž platí i pro hranici.

Důležité vlastnosti konformního zobrazení

Mějme v komplexní rovině tři blízké body z_1, z_2, z_3 , které se transformují do tří blízkých bodů $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ v komplexní rovině ζ .

$$\zeta_1 = f(z_1)$$

$$\zeta_2 = f(z_2)$$

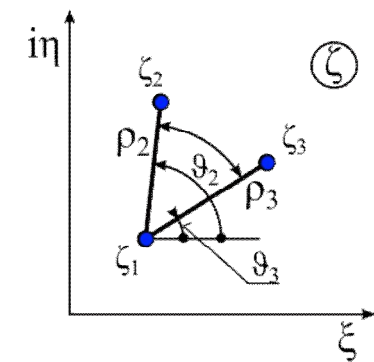
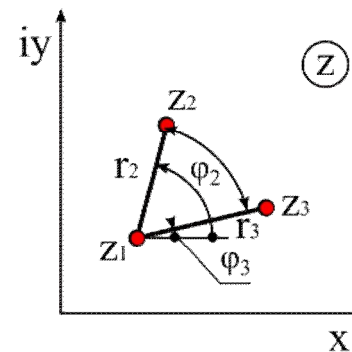
$$\zeta_3 = f(z_3)$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{df(z)}{dz} \cong \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{z_2 - z_1} = \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{z_3 - z_1}$$

$$\frac{df(z)}{dz} \cong \frac{\rho_2 \cdot e^{i\vartheta_2}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_3 \cdot e^{i\vartheta_3}}{r_3 \cdot e^{i\varphi_3}}$$

$$\frac{d\zeta}{dz} \cong \frac{\rho_2}{r_2} = \frac{\rho_3}{r_3} \quad \frac{e^{i\vartheta_2}}{e^{i\varphi_2}} = \frac{e^{i\vartheta_3}}{e^{i\varphi_3}} \quad e^{i(\vartheta_2 - \varphi_2)} = e^{i(\vartheta_3 - \varphi_3)}$$

$$(\vartheta_3 - \vartheta_2) = (\varphi_3 - \varphi_2)$$



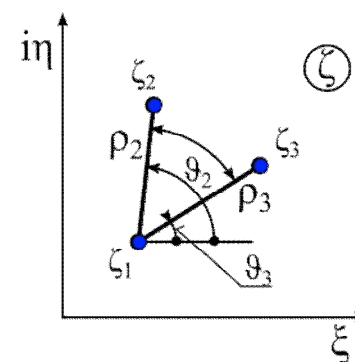
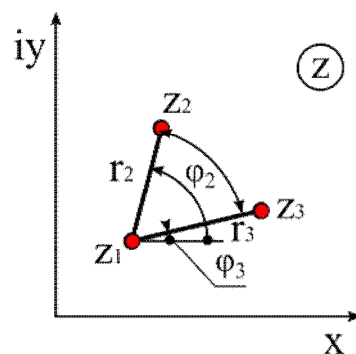
Důležité vlastnosti konformního zobrazení

Poměr odpovídajících si stran zůstává stejný.

$$\frac{\rho_2}{r_2} = \frac{\rho_3}{r_3}$$

Úhly odpovídajících stran se zachovávají.

$$(\vartheta_3 - \vartheta_2) = (\varphi_3 - \varphi_2)$$



Trojúhelníky z_1, z_2, z_3 a $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ jsou **podobné**.

V teorii komplexní proměnné se dokazuje obecná věta o zobrazení, že totiž vnitřek libovolného obrysu lze konformně zobrazit na kruh, tj. vnitřek kružnice.

Žukovského transformace

$$z = \zeta + \frac{\ell^2}{\zeta}$$

Pomocí této transformace můžeme transformovat kruh na žukovského profil.

Rozložíme tento vztah na reálnou a imaginární část

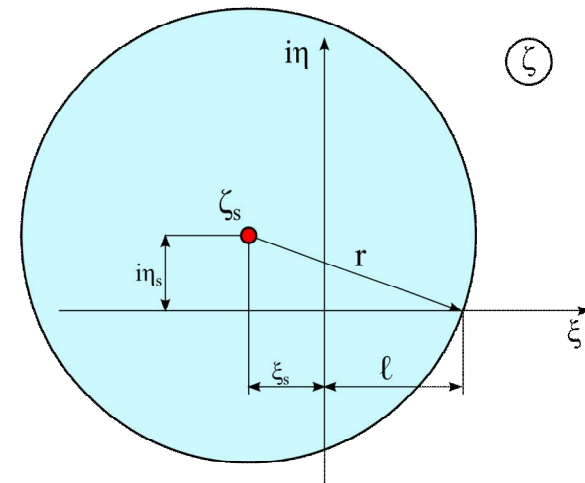
$$z = \xi \cdot \left(1 + \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2} \right) + i \cdot \eta \cdot \left(1 - \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2} \right)$$

Platí tyto relace

$$\ell = \sqrt{r^2 - \eta_s^2} + \xi_s$$

Rovnice kružnice je dána tímto vztahem

$$\zeta = \zeta_s + r \cdot e^{i\varphi}$$



Žukovského transformace

Můžeme prověřit tři základní polohy řídicí kružnice

1. Střed kružnice leží v počátku souřadného systému
2. Střed kružnice leží na imaginární ose $i\eta$
3. Střed kružnice má obecnou polohu, ale počátek musí ležet uvnitř kružnice

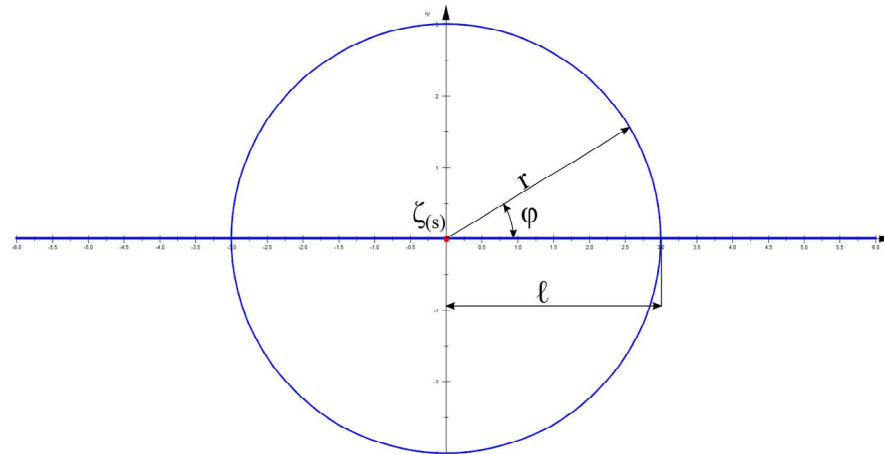
První případ : střed kružnice leží v počátku souřadného systému.

$$z = \xi \cdot \left(1 + \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2} \right) + i \cdot \eta \cdot \left(1 - \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2} \right)$$

V tomto případě platí

$$\ell = r, \quad \zeta = r \cdot e^{i\vartheta} \quad \rightarrow \quad \xi = r \cdot \cos\vartheta \quad \eta = r \cdot \sin\vartheta$$

$$z = \xi \cdot \left(1 + \frac{r^2}{r^2} \right) + i \cdot \eta \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r^2} \right) = 2 \cdot \xi = 2 \cdot r \cdot \cos\vartheta$$

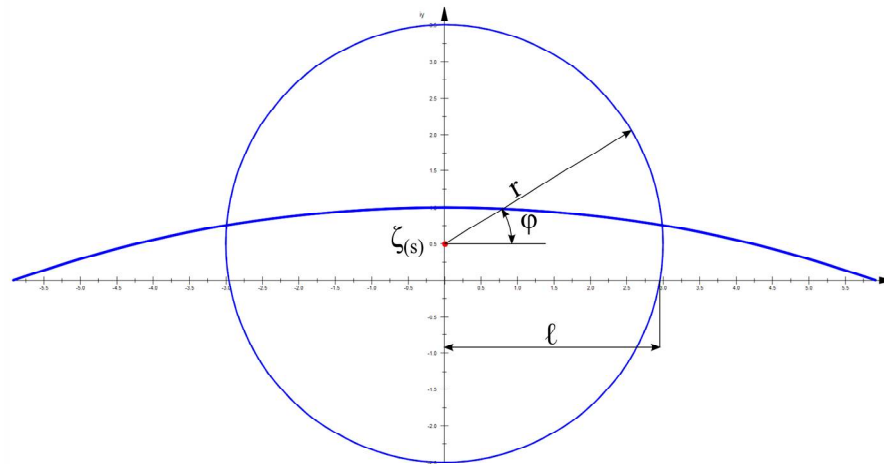


Dostáváme tak vlastně rovinnou desku. Nátoková hrana je v bodě $-2 \cdot r$ a odtoková v místě $2 \cdot r$.

Druhá varianta: střed leží na imaginární ose $i\eta$.

V tomto případě platí

$$\xi_s = 0 \quad \Rightarrow \quad \ell = \sqrt{r^2 - \eta_s^2} \quad \Rightarrow \quad z = \xi \cdot \left(1 + \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2}\right) + i \cdot \eta \cdot \left(1 - \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2}\right)$$



Můžeme vyzkoumat kde budou ležet body $-\ell, +\ell$.

Pro tento případ tedy platí.

$$\xi = \pm \ell \quad \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \ell \cdot \left(1 + \frac{\ell^2}{\ell^2}\right) = \pm 2 \cdot \ell$$

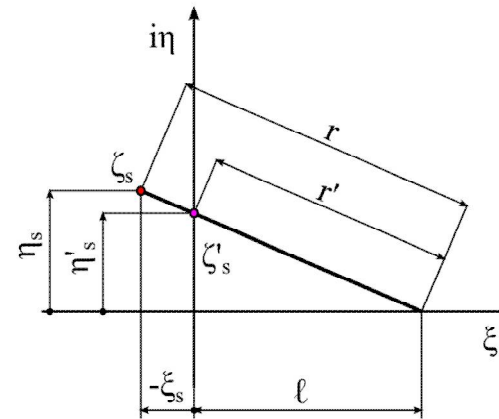
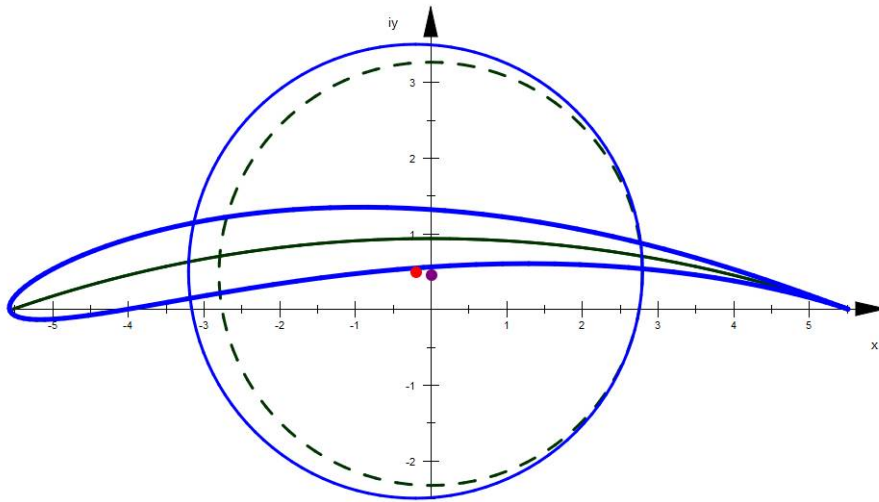
Můžeme vyzkoumat kde budou ležet body $i(\eta_s \pm r)$. $\xi=0$

$$z = i \cdot (\eta_s \pm r) \cdot \left(1 - \frac{r^2 - \eta_s^2}{(\eta_s \pm r)^2}\right) = i \cdot \left((\eta_s \pm r) - \frac{r^2 - \eta_s^2}{(\eta_s \pm r)}\right) = i \cdot \left(\frac{(\eta_s \pm r)^2 - r^2 + \eta_s^2}{(\eta_s \pm r)}\right) = i \cdot 2 \cdot \eta_s$$

Druhá varianta střed leží na imaginární ose $i\eta$.

V tomto případě nemáme žádné zjednodušení a platí obecný vztah

$$z = \xi \cdot \left(1 + \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2}\right) + i \cdot \eta \cdot \left(1 - \frac{\ell^2}{\xi^2 + \eta^2}\right) \quad \text{Kde:} \quad \zeta = \zeta_s + r \cdot e^{i\varphi}$$



Poloměr řídicí kružnice střední čáry

Poloha řídicí kružnice střední čáry

$$r' = \frac{\ell \cdot r}{\ell - \xi_s}$$

$$\eta'_s = \frac{\ell \cdot \eta_s}{\ell - \xi_s}$$

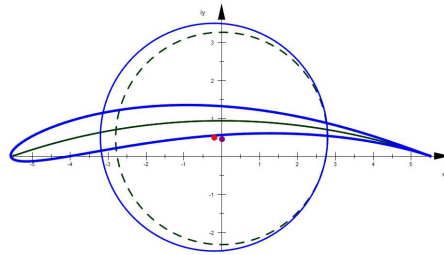
Žukovského transformace - závěr.

Výhody:

Dostáváme krásný profil, kde můžeme využít svoje znalosti ohledně obtékání válce

Nevýhody:

Tento profil není reálný. Má nulový úhel na odtokové hraně.



Existuje transformace, která umožňuje mít nenulový úhel na odtokové hraně.

$$\frac{z - n \cdot \ell}{z + n \cdot \ell} = \left(\frac{\zeta - \ell}{\zeta + \ell} \right)^n \quad n = 2 - \frac{\varepsilon}{\pi} \quad \varepsilon - \text{úhel odtokové hrany}$$

Pro $n = 2$ dostaneme Žukovského transformaci.

