Mezní vrstva

Mezní vrstva její definice

Při obtékání těles můžeme kapalinu rozdělit na dvě oblasti.

Blízko obtékaného tělesa – musíme zde kapalinu považovat za viskózní kapalinu

Dostatečně daleko od obtékaného tělesa – kapalina se chová jako ideální kapalina, neviskózní

Definice mezní vrstvy I.

Jedná se o oblast v proudící kapalině v blízkosti obtékaného tělesa, kde jsou viskózní síly řádově stejně velké jako síly setrvačné.

Definice mezní vrstvy II.

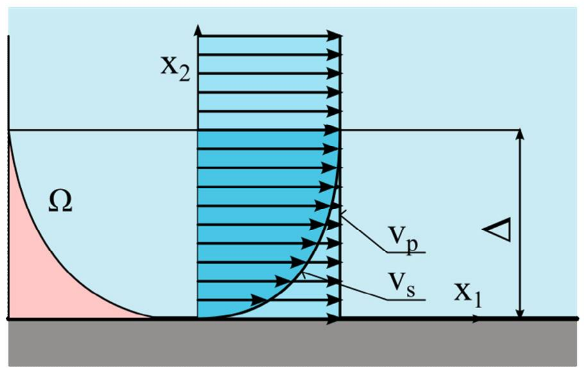
Jedná se o oblast v proudící kapalině v blízkosti obtékaného tělesa, kde je proudění vířivé.

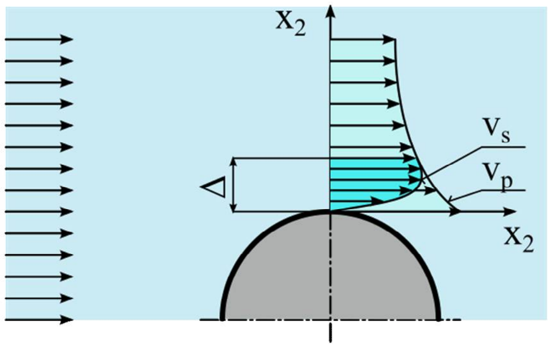
Důležité!!

Všimněte si shody s definicí jádra víru.

Tloušťka mezní vrstvy

Tloušťka mezní vrstvy není nic přesného, protože určení hranice mezní vrstvy není nic jednoznačného.





Tloušťku mezní vrstvy je možné definovat smluvně. Smluvně určíme velikost rozdílu rychlosti potenciálního a skutečného rychlostního profilu.

$$\frac{v_{(p)} - v_{(s)}}{v_{(p)}} = a \qquad\qquad v_{(s)} = v_{(p)}.(1 - a)$$

Pokud platí výše uvedená podmínka, pak předpokládáme, že se jedná o hranici mezní vrstvy.

Prandtlova rovnice mezní vrstvy

Jedná se o rovnici laminární mezní vrstvy. Při pozorování proudění v mezní vrstvě si Prandtl všiml následujících skutečností.

$$\frac{v_2}{v_1} = \bar{\delta} \ll 1 \qquad \frac{x_2}{x_1} \approx \bar{\delta}$$

$$v_1 \approx v_\infty \qquad x_1 \approx L$$

Budeme uvažovat stacionární, 2D proudění v mezní vrstvě.
Rovina proudění je kolmá na tíhové zrychlení.
Pro toto proudění můžeme napsat Navier-Stokesovu rovnici.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.v_k = \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}.\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k.\partial x_k}$$

Rozepíšeme-li to do složkových rovnic pak dostaneme:

Ve směru osy x_1

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}.v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.v_2 = \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho}.\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1.\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2.\partial x_2}\right)$$

Ve směru osy x_2

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1}.v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}.v_2 = \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\rho}.\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1.\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2.\partial x_2}\right)$$

Prandtlova rovnice mezní vrstvy

Nejdříve se budeme zabývat složkovou rovnicí ve směru x_1

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}.v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.v_2 = \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho}.\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1.\partial x_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2.\partial x_2}\right)$$

Celou rovnici vynásobíme následujícím vztahem

$$\frac{L}{v_\infty^2} \qquad \left[\frac{x^2}{m}\right]$$

Tím ji převedeme na bezrozměrný tvar

$$\frac{\partial\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)}\frac{v_1}{v_\infty} + \frac{\partial\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{L}\right)}.\frac{v_2}{v_\infty} = \frac{\partial\left(\frac{p}{\rho.v_\infty^2}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)} + \frac{\frac{\mu}{\rho}}{v_\infty.L}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right).\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)} + \frac{\partial^2\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{L}\right).\partial\left(\frac{x_2}{L}\right)}\right]$$

Vezmeme do úvahy následujíc relace

$$\frac{v_2}{v_1} = \bar{\delta} \ll 1 \qquad\qquad v_1 \approx v_\infty$$

$$\frac{x_2}{x_1} \approx \bar{\delta} \qquad\qquad x_1 \approx L$$

Prandtlova rovnice mezní vrstvy

$$\frac{\partial\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)}.\frac{v_1}{v_\infty}+\frac{\partial\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{L}\right)}.\frac{v_2}{v_\infty}=\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho.v_\infty^2}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)}+\frac{\frac{\mu}{\rho}}{v_\infty.L}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right).\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)}+\frac{\partial^2\left(\frac{v_1}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{L}\right).\partial\left(\frac{x_2}{L}\right)}\right]$$

$$\frac{1}{1}.1 \qquad +\frac{1}{\bar{\delta}}.\bar{\delta} \qquad =\frac{1}{1} \qquad +\left[\bar{\delta}^2+\frac{1}{1}\right]$$

Platí Bernoulliho rovnice

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v_\infty^2}{2}=konst \Rightarrow \frac{p}{\rho}\approx\frac{v_\infty^2}{2} \Rightarrow \frac{2.p}{\rho.v_\infty^2}\approx 1$$

Jsme v mezní vrstvě a tudíž třecí síly musí být řádově stejně velké jako setrvačné síly. Proto musí platit

$$\frac{1}{Re}\left[\frac{1}{1.1}+\frac{1}{\bar{\delta}.\bar{\delta}}\right]=1 \Rightarrow \frac{1}{Re}\approx\bar{\delta}^2 \Rightarrow \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{1.1}+\frac{1}{\bar{\delta}.\bar{\delta}}\right]=\left[\bar{\delta}^2+\frac{1}{1}\right]$$

Pro proudění v mezní vrstvě ve směru x_1 tedy platí první Prandtlova rovnice mezní vrstvy

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}.v_1+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}.v_2=\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\mu}{\rho}.\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2.\partial x_2}$$

Prandtlova rovnice mezní vrstvy

$$\frac{\partial\left(\frac{v_2}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)}.\frac{v_1}{v_\infty}+\frac{\partial\left(\frac{v_2}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{L}\right)}.\frac{v_2}{v_\infty}=\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho.v_\infty^2}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{L}\right)}+\frac{\frac{\mu}{\rho}}{v_\infty.L}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{v_2}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_1}{L}\right).\partial\left(\frac{x_1}{L}\right)}+\frac{\partial^2\left(\frac{v_2}{v_\infty}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{L}\right).\partial\left(\frac{x_2}{L}\right)}\right]$$

$$\frac{\bar{\delta}}{1}.1 \qquad +\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}}.\bar{\delta} \qquad =\frac{1}{\bar{\delta}} \qquad +\left[\bar{\delta}^3+\bar{\delta}\right]$$

Platí Bernoulliho rovnice

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v_\infty^2}{2}=konst \Rightarrow \frac{p}{\rho}\approx\frac{v_\infty^2}{2} \Rightarrow \frac{2.p}{\rho.v_\infty^2}\approx 1$$

Jak je to s viskózním členem?

$$\frac{1}{Re}\approx\bar{\delta}^2 \Rightarrow \frac{1}{Re}\left[\frac{\bar{\delta}}{1.1}+\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}.\bar{\delta}}\right]=\left[\bar{\delta}^3+\bar{\delta}\right]$$

Pro proudění v mezní vrstvě ve směru x_1 tedy platí první Prandtlova rovnice mezní vrstvy

$$0=\frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x_2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_2}=0$$

Důležitá rovnice. Co nám říká???

Tlak napříč mezní vrstvou se nemění!!!!!

Prandtlova rovnice mezní vrstvy - shrnutí

Prandtlova rovnice mezní vrstvy platí pro laminární proudění, vzhledem k tomu, že vycházíme, z Navier stokesovy rovnice.

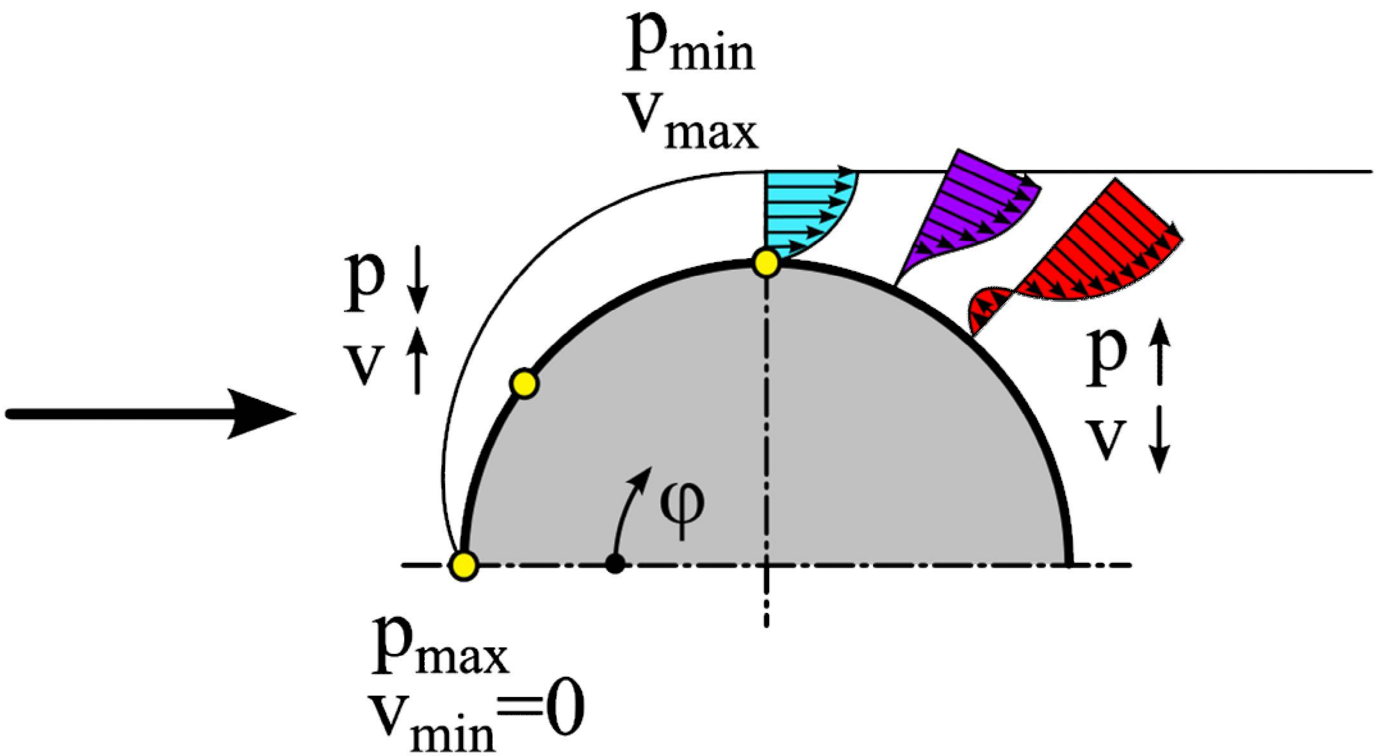
Máme tedy dvě rovnice

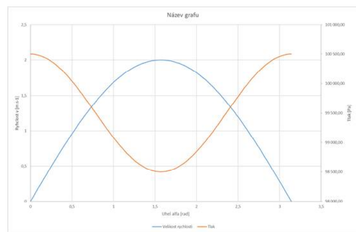
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}.v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.v_2 = \frac{1}{\rho}.\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho}.\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2.\partial x_2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

Tlak napříč mezní vrstvou se nemění. Tento důsledek má velký význam při objasňování odtržení mezní vrstvy.

Odtržení mezní vrstvy





Odhad tloušťky mezní vrstvy

Prandtlova rovnice mezní vrstvy ve směru x_1.

$$\underbrace{\rho\,.\frac{\partial v_1}{\partial x_1}.\,v_1+\rho.\frac{\partial v_2}{\partial x_2}.\,v_2}_{\substack{\text{Setrvačné síly}\\ \approx \\ \frac{\rho}{2}\frac{v_\infty^2}{L}}}=\frac{\partial p}{\partial x_1}+\underbrace{\mu.\left(0+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2.\,\partial x_2}\right)}_{\substack{\text{Třecí síly}\\ \approx \\ \mu.\frac{v_\infty}{\delta^2}}}$$

Takže, podle definice, v mezní vrstvě platí:

$$\frac{\rho}{2}\frac{v_\infty^2}{L}\approx\mu.\frac{v_\infty}{\delta^2}\;\Rightarrow\;\delta^2\approx\mu.\frac{2}{\rho}.\frac{L}{v_\infty}\;\Rightarrow\;\delta=K.\sqrt{\frac{\mu}{\rho}.\frac{L}{v_\infty}}\;\Rightarrow\;\frac{\delta}{L}=K.\sqrt{\frac{\frac{\mu}{\rho}}{L.\,v_\infty}}$$

Pro laminární mezní vrstvu platí, že K = 5, pak můžeme psát:

$$\frac{\delta}{L}=\frac{5}{\sqrt{Re}}$$

Odtržení mezní vrstvy