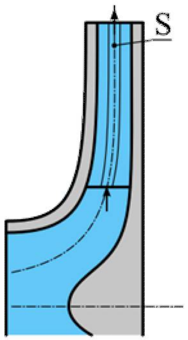
Potenciální proudění

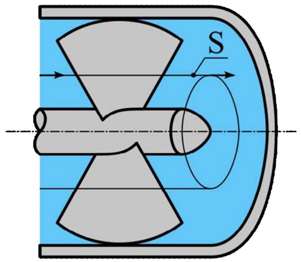
Řešení profilových mříží

Typy lopatkových mříží

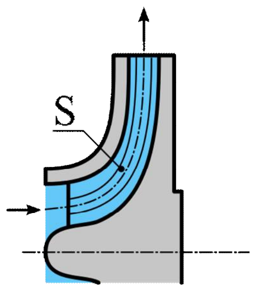
Radiální



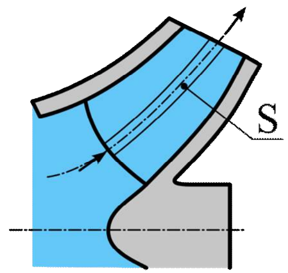
Axiální



Radiaxiální

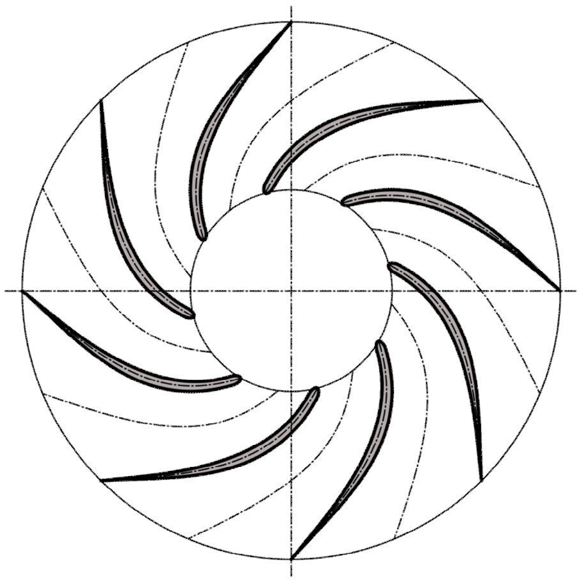


Diagonální

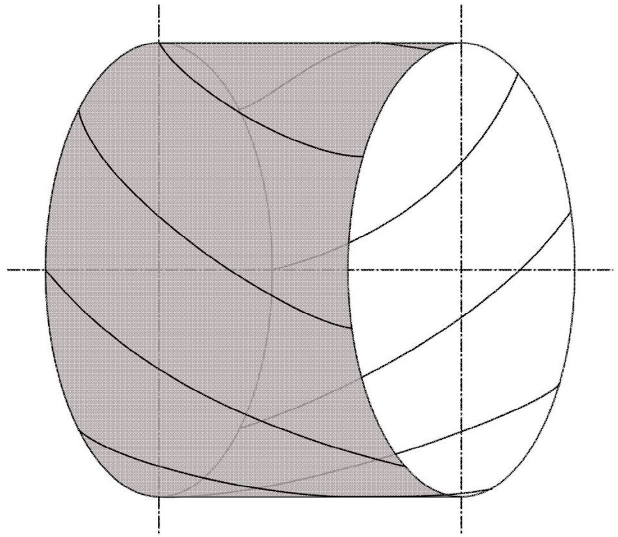


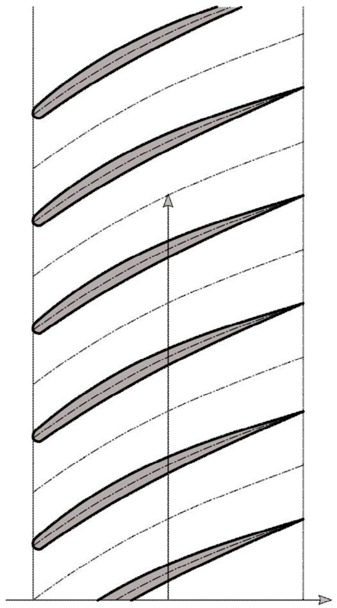
Profilové mříže

Radiální

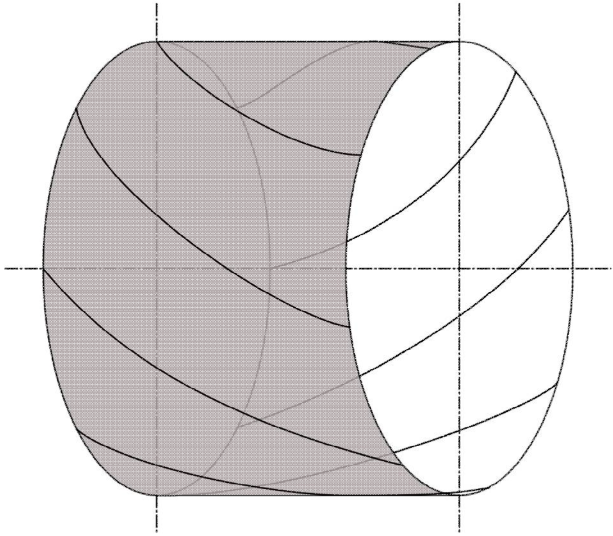


Axiální

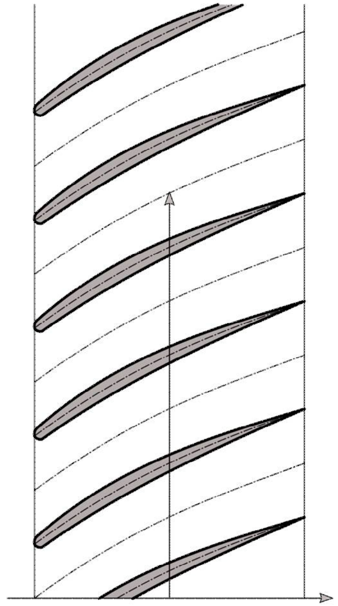


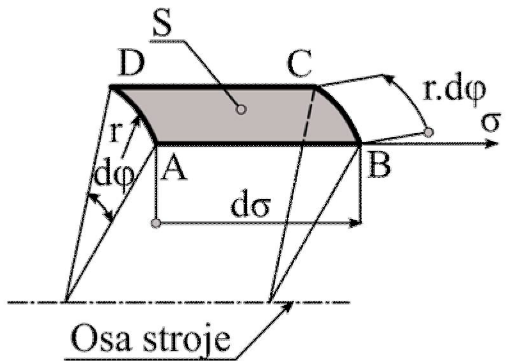


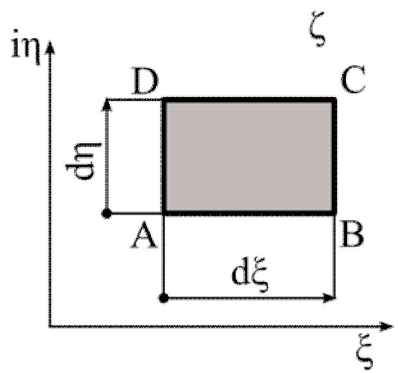
Transformace válcové profilové mříže na přímou mříž



Konformní
zobrazení



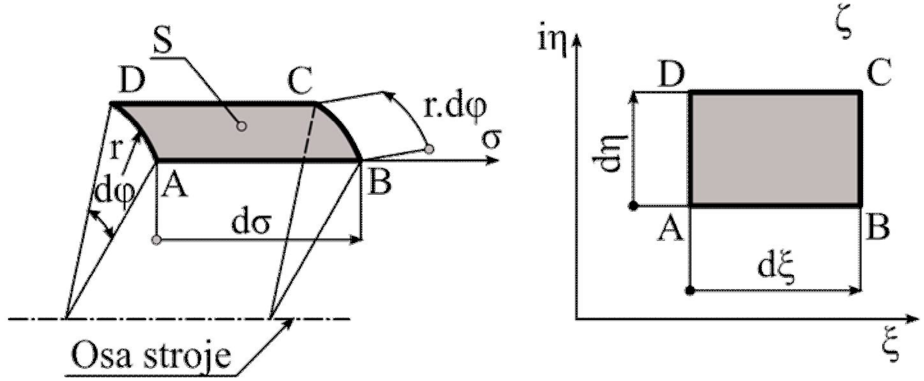




Transformace válcové profilové mříže na přímou mříž

Poměr odpovídajících si stran zůstává stejný

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\eta}{r.d\varphi} = k$$



V ploše S je každý profil pootočený o:

$$\Delta\varphi = \frac{2.\pi}{N}$$

N – počet lopatek původní kruhové mříže.

Přímá mříž v rovině ζ má mít profily rozdělené rovnoměrně s roztečí t. Proto musí být souřadnice η závislá pouze na úhlu φ a to lineárně.

$$\eta = A.\varphi + B$$

Přírůstku o Δφ u válcové mříže musí odpovídat přírůstek o rozteč u přímé profilové mříže.

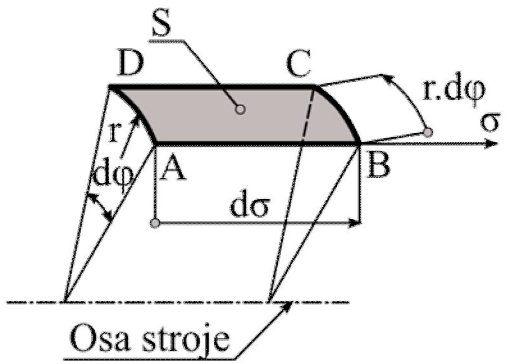
$$\eta + t = A.\left(\varphi + \frac{2.\pi}{N}\right) + B$$

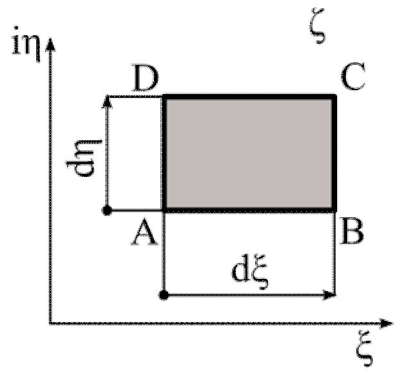
Transformace válcové profilové mříže na přímou mříž

Máme tyto dvě rovnice.

$$\eta = A.\varphi + B$$

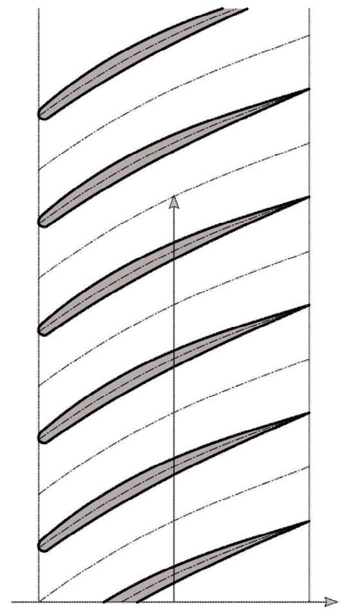
$$\eta + t = A.\left(\varphi + \frac{2.\pi}{N}\right) + B$$





Odečteme je od sebe a můžeme vyjádřit A

$$t = A.\frac{2.\pi}{N} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{N.t}{2.\pi}$$



Konstanta B udává polohu referenčního profilu.
Předpokládejme že pro polohu náběžné hrany platí

$$\eta_1 = A.\varphi_1 + B \quad \Rightarrow \quad B = \eta_1 - A.\varphi_1$$

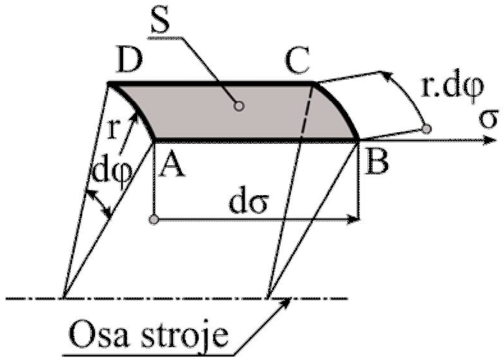
Hodnoty t a η_1 jsou vlastně volené. Aplikujeme to vše na původní rovnici a dostaneme transformační rovnici pro souřadnici η.

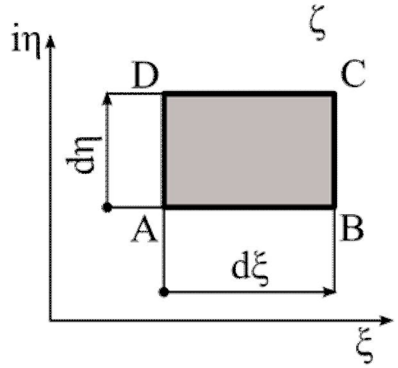
$$\eta = \eta_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.(\varphi - \varphi_1)$$

Transformace válcové profilové mříže na přímou mříž

Transformační vztah pro souřadnici ξ získáme z podmínek konformního zobrazení.

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\eta}{r.\,d\varphi}$$

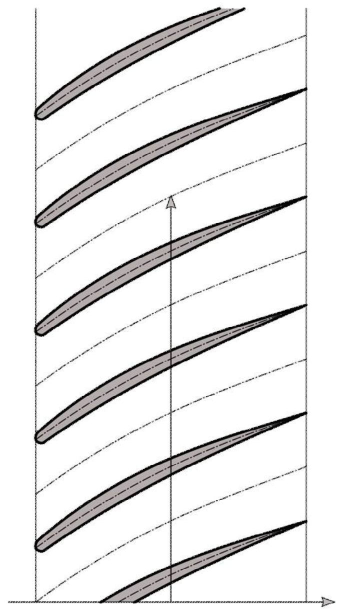




$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{N.\,t}{2.\,\pi}$$

$$d\xi = \frac{d\eta}{d\varphi}.\frac{d\sigma}{r} = \frac{N.\,t}{2.\,\pi}.\frac{d\sigma}{r}$$

$$\xi = \frac{d\eta}{d\varphi}.\frac{d\sigma}{r} = \frac{N.\,t}{2.\,\pi}.\frac{\sigma}{r} + k_{\xi}$$



Konstanta k_{ξ} určuje polohu profilu ve směru ξ. Poloha náběžné hrany má souřadnice $\sigma=\sigma_1$ a tomu odpovídá $\xi= \xi_1$

$$\xi_1 = \frac{N.\,t}{2.\,\pi}.\frac{\sigma_1}{r} + k_{\xi} \quad \Rightarrow \quad k_{\xi} = \xi_1 - \frac{N.\,t}{2.\,\pi}.\frac{\sigma_1}{r}$$

Pak

$$\xi = \xi_1 + \frac{N.\,t}{2.\,\pi}.\frac{1}{r}(\sigma - \sigma_1)$$

Transformace válcové profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Máme tedy následující transformační vztah

$$\xi = \xi_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.\frac{1}{r}(\sigma - \sigma_1)$$

Ten ještě trochu upravíme.
Hloubku profilu označíme d.

$$\xi_2 = \xi_1 + d = \xi_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.\frac{1}{r}(\sigma_2 - \sigma_1)$$

$$\frac{N.t}{2.\pi} = \frac{d.r}{(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

Transformační vztah pro ξ pak tedy můžeme psát

$$\xi = \xi_1 + d.\frac{(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

Transformační vztah pro η pak tedy můžeme psát

$$\eta = \eta_1 + d.\frac{r.(\varphi - \varphi_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

Hustotu mříže můžeme definovat jako

$$\frac{d}{t} = \frac{N}{2.\pi}\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{r}$$

Transformace válcové profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Můžeme tedy transformovat válcovou mříž do přímé profilové mříže pomocí následujících transformačních vztahů.

$$\xi = \xi_1 + d.\frac{(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \qquad \xi = \xi_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.\frac{1}{r}(\sigma - \sigma_1)$$

$$\eta = \eta_1 + d.\frac{r.(\varphi - \varphi_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \qquad \eta = \eta_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.(\varphi - \varphi_1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \frac{N.t}{2.\pi}.\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{2.\pi}{N.t}.r$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{N.t}{2.\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{2.\pi}{N.t}$$

Proudění budeme řešit v nekonečné přímé lopatkové mříži. Jak transformovat rychlosti vypočtené v přímé lopatkové mříži do původní válcové mříže?

Transformace válcové profilové mříže na přímou mříž – kinematické vztahy

Vzhledem k tomu, že se jedná o potenciální proudění tak můžeme rychlosti vyjádřit následujícím způsobem

$$v_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = v_\sigma.\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = v_\sigma.r.\frac{2.\pi}{N.t} \qquad v_\sigma = v_\xi.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi}$$

$$v_\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{r.\partial \varphi}.\frac{r.\partial \varphi}{\partial \eta} = v_\varphi.r.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = v_\varphi.r.\frac{2.\pi}{N.t} \qquad v_\varphi = v_\eta.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi}$$

Obě složky se transformují stejným způsobem. To znamená, že můžeme psát.

$$|v_S| = |v_\zeta|.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi} \qquad |v_\zeta| = |v_S|.r.\frac{2.\pi}{N.t}$$

Rychlostní trojúhelníky na obou plochách jsou si vzájemně podobné. Proto existují stejné transformační vztahy i pro unášivou a relativní rychlost.

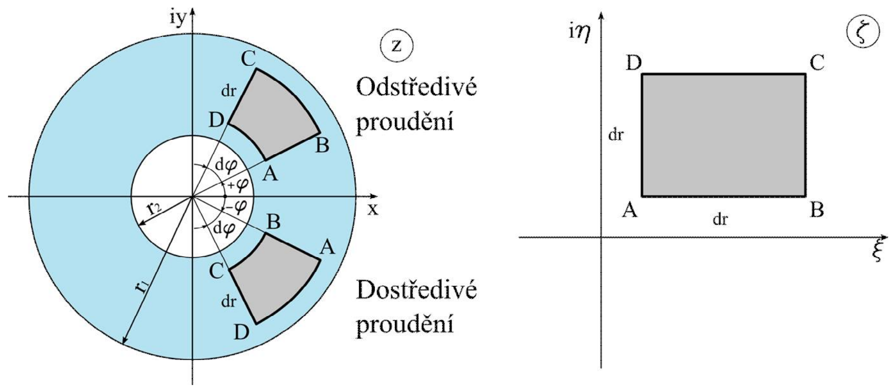
$$|u_S| = |u_\zeta|.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi} \qquad |u_\zeta| = |u_S|.r.\frac{2.\pi}{N.t}$$

$$|w_S| = |w_\zeta|.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi} \qquad |w_\zeta| = |w_S|.r.\frac{2.\pi}{N.t}$$

Transformace radiální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Poměr odpovídajících si stran zůstává stejný

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{d\eta}{r.d\varphi} = k$$



V ploše S je každý profil pootočený o:

$$\Delta\varphi = \pm\frac{2.\pi}{N}$$

N – počet lopatek původní kruhové mříže. + odstředivý průtok, - dostředivý průtok

Přímá mříž v rovině ζ má mít profily rozdělené rovnoměrně s roztečí t. Proto musí být souřadnice η závislá pouze na úhlu φ a to lineárně.

$$\eta = A.\varphi + B$$

Přírůstku o Δφ u válcové mříže musí odpovídat přírůstek o rozteč u přímé profilové mříže.

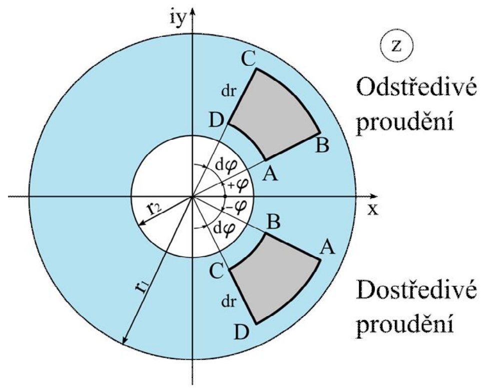
$$\eta + t = A.\left(\varphi \pm \frac{2.\pi}{N}\right) + B$$

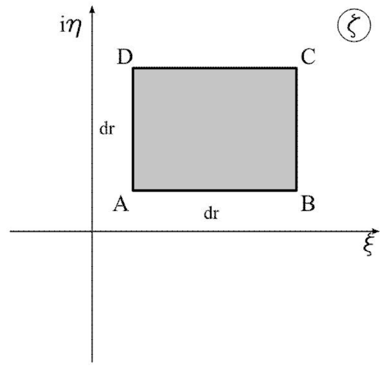
Transformace radiální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Máme tyto dvě rovnice.

$$\eta = A.\varphi + B$$

$$\eta + t = A.\left(\varphi \pm \frac{2.\pi}{N}\right) + B$$





Odečteme je od sebe a můžeme vyjádřit A

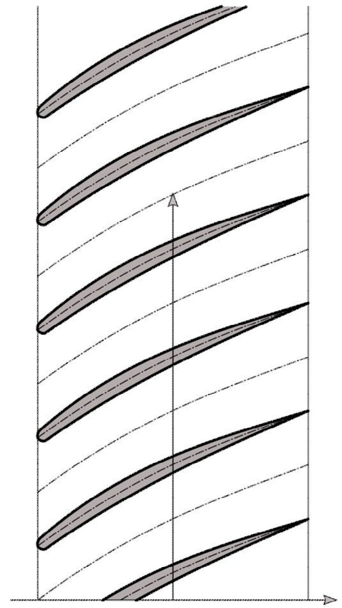
$$t = \pm A.\frac{2.\pi}{N} \quad \Rightarrow \quad A = \pm\frac{N.t}{2.\pi}$$

Konstanta B udává polohu referenčního profilu.
Předpokládejme že pro polohu náběžné hrany platí

$$\eta_1 = A.\varphi_1 + B \quad \Rightarrow \quad B = \eta_1 - A.\varphi_1$$

Hodnoty t a η_1 jsou vlastně volené. Aplikujeme to vše na původní rovnici a dostaneme transformační rovnici pro souřadnici η.

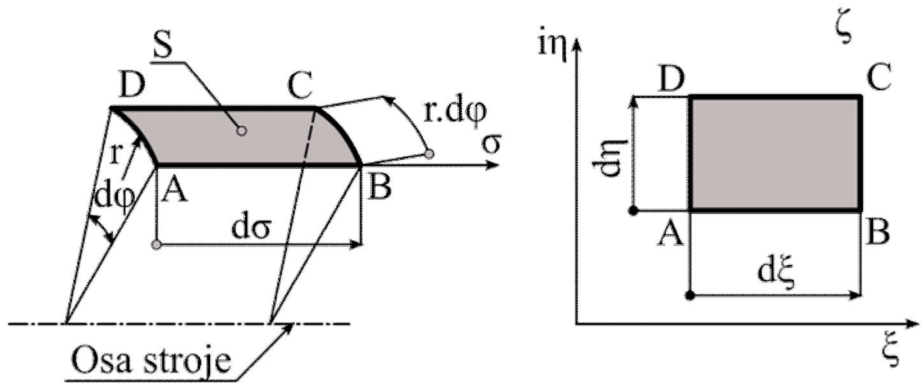
$$\eta = \eta_1 \pm \frac{N.t}{2.\pi}.(\varphi - \varphi_1)$$



Transformace radiální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Transformační vztah pro souřadnici ξ získáme z podmínek konformního zobrazení.

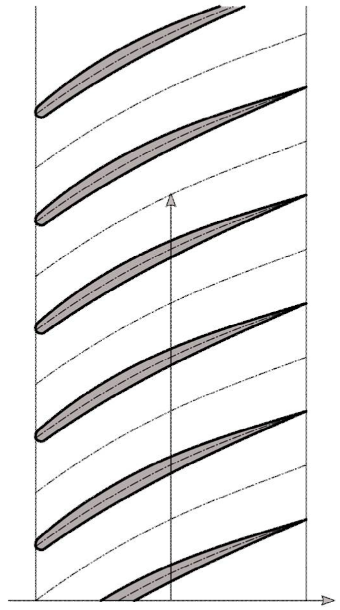
$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{d\eta}{r.d\varphi}$$



$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \pm\frac{N.t}{2.\pi}$$

$$d\xi = \frac{d\eta}{d\varphi}.\frac{dr}{r} = \pm\frac{N.t}{2.\pi}.\frac{dr}{r}$$

$$\xi = \pm\frac{N.t}{2.\pi}.lnr + k_\xi$$



Konstanta k_ξ určuje polohu profilu ve směru ξ. Poloha náběžné hrany má souřadnice $r=r_1$ a tomu odpovídá $\xi = \xi_1$

$$\xi_1 = \pm\frac{N.t}{2.\pi}.lnr_1 + k_\xi \Rightarrow k_\xi = \xi_1 \mp \frac{N.t}{2.\pi}.lnr_1$$

Pak

$$\xi = \xi_1 \pm \frac{N.t}{2.\pi}.ln\frac{r}{r_1}$$

Transformace radiální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Máme tedy následující transformační vztah

$$\xi = \xi_1 \pm \frac{N.t}{2.\pi}.ln\frac{r}{r_1}$$

Ten ještě trochu upravíme.
Hloubku profilu označíme d.

$$\xi_2 = \xi_1 + d = \xi_1 \pm \frac{N.t}{2.\pi}.ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\pm\frac{N.t}{2.\pi} = \frac{d.r}{ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Transformační vztah pro ξ pak tedy můžeme psát

$$\xi = \xi_1 + d.\frac{ln\frac{r}{r_1}}{ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Transformační vztah pro η pak tedy můžeme psát

$$\eta = \eta_1 + d.\frac{(\varphi - \varphi_1)}{ln\frac{r_2}{r_1}}$$

Hustotu mříže můžeme definovat jako

$$\frac{d}{t} = \pm\frac{N}{2.\pi}.ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{N}{2.\pi}.\left|ln\frac{r_2}{r_1}\right|$$

Transformace radiální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Můžeme tedy transformovat válcovou mříž do přímé profilové mříže pomocí následujících transformačních vztahů.

$$\xi = \xi_1 + d.\frac{ln\frac{r}{r_1}}{ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad \eta = \eta_1 + d.\frac{(\varphi - \varphi_1)}{ln\frac{r_2}{r_1}}$$

$$\xi = \xi_1 \pm \frac{N.t}{2.\pi}.ln\frac{r}{r_1} \qquad \eta = \eta_1 \pm \frac{N.t}{2.\pi}.(\varphi - \varphi_1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \pm\frac{N.t}{2.\pi}.\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \xi} = \pm\frac{2.\pi}{N.t}.r$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \pm\frac{N.t}{2.\pi} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \pm\frac{2.\pi}{N.t}$$

Proudění budeme řešit v nekonečné přímé lopatkové mříži. Jak transformovat rychlosti vypočtené v přímé lopatkové mříži do původní válcové mříže?

Transformace radiální profilové mříže na přímou mříž – kinematické vztahy

Vzhledem k tomu, že se jedná o potenciální proudění tak můžeme rychlosti vyjádřit následujícím způsobem

$$v_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial \xi} = v_r.\frac{\partial r}{\partial \xi} = v_r.r.\frac{2.\pi}{N.t} \qquad v_r = v_\xi.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi}$$

$$v_\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{r.\partial \varphi}.\frac{r.\partial \varphi}{\partial \eta} = v_\varphi.r.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = v_\varphi.r.\frac{2.\pi}{N.t} \qquad v_\varphi = v_\eta.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi}$$

Obě složky se transformují stejným způsobem. To znamená, že můžeme psát.

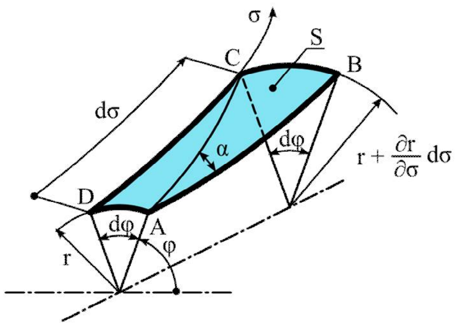
$$|v_S| = |v_\zeta|.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi} \qquad |v_\zeta| = |v_S|.r.\frac{2.\pi}{N.t}$$

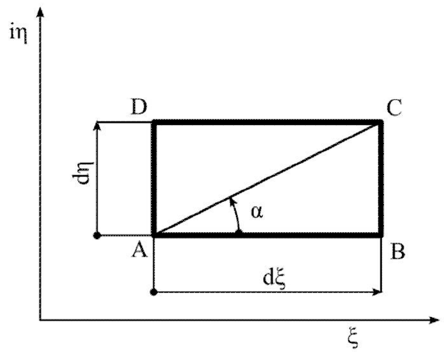
Rychlostní trojúhelníky na obou plochách jsou si vzájemně podobné. Proto existují stejné transformační vztahy i pro unášivou a relativní rychlost.

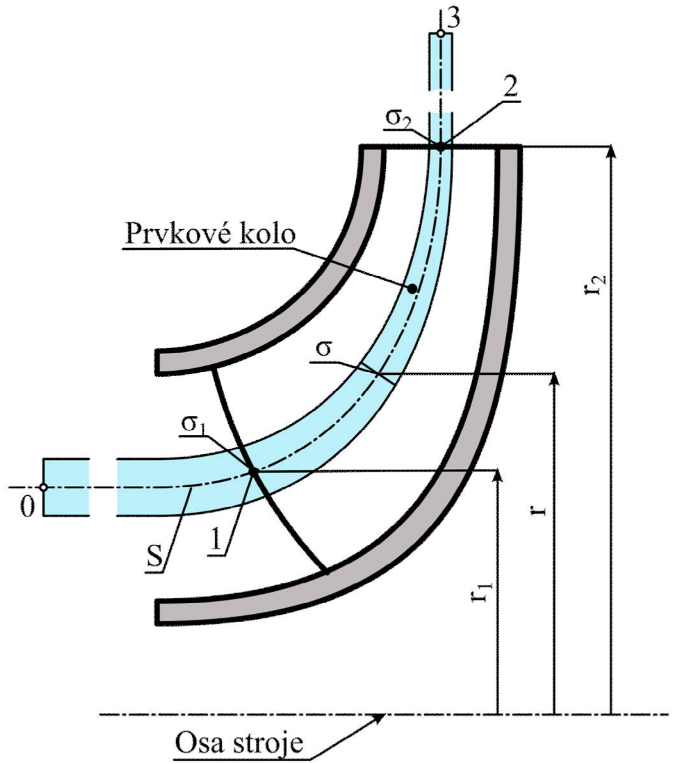
$$|u_S| = |u_\zeta|.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi} \qquad |u_\zeta| = |u_S|.r.\frac{2.\pi}{N.t}$$

$$|w_S| = |w_\zeta|.\frac{1}{r}.\frac{N.t}{2.\pi} \qquad |w_\zeta| = |w_S|.r.\frac{2.\pi}{N.t}$$

Obecná transformace radi-axíální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy







Poměr odpovídajících si stran zůstává stejný

$$tg\alpha = \frac{r(\sigma).d\varphi}{d\sigma} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\mu_{(A)} = \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\eta}{r(\sigma).d\varphi}$$

V případě, že závislost η na φ je lineární je $\mu_{(A)}$ funkcí pouze proměnné σ.

$$\eta = A.\varphi + B \Rightarrow \frac{d\eta}{d\varphi} = A$$

$$\eta + t = A.\left(\varphi + \frac{2.\pi}{N}\right) + B \Rightarrow t = A.\frac{2.\pi}{N} \Rightarrow A = \frac{N.t}{2.\pi}$$

Obecná transformace radi-axíální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Konstantu A je tedy vyjádřena

$$A = \frac{N.t}{2.\pi}$$

Pak tedy

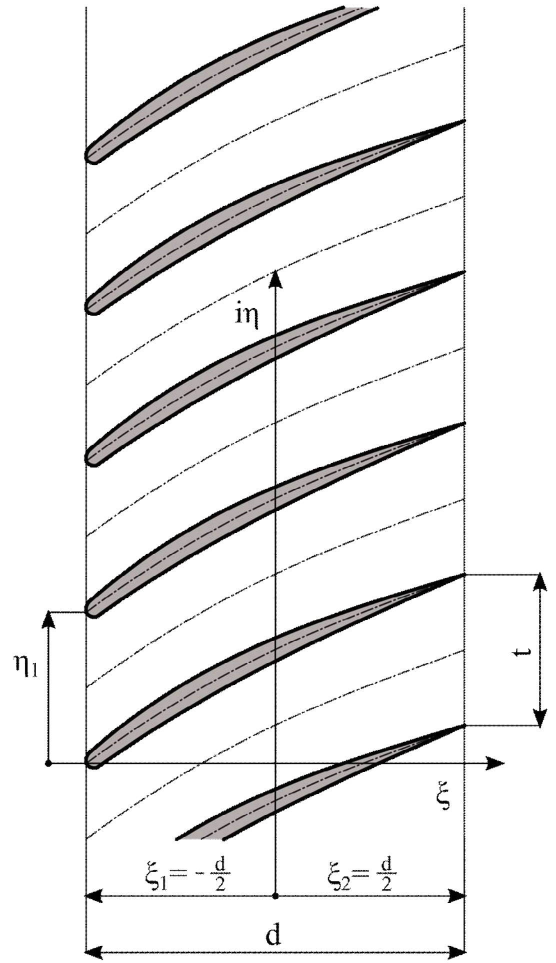
$$\eta = \frac{N.t}{2.\pi}.\varphi + B$$

Dále podle polohy referenčního profilu můžeme psát

$$\eta = \eta_1 \qquad \varphi = \varphi_1$$

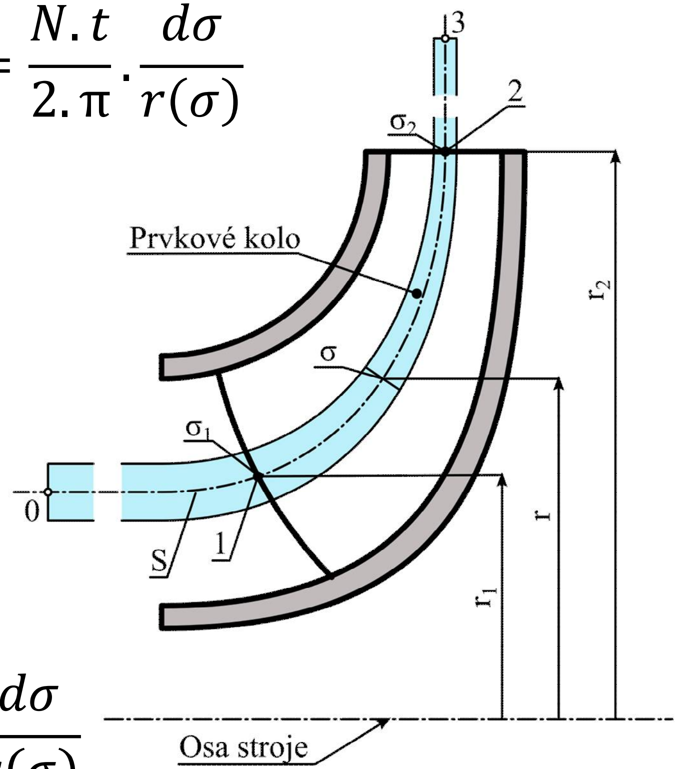
$$\eta_1 = \frac{N.t}{2.\pi}.\varphi_1 + B \quad \Rightarrow \quad B = \eta_1 - \frac{N.t}{2.\pi}.\varphi_1$$

$$\boxed{\eta = \eta_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.(\varphi - \varphi_1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{N.t}{2.\pi}$$



Obecná transformace radi-axíální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

$$\mu_{(A)} = \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\eta}{r(\sigma).d\varphi} \quad \Rightarrow \quad d\xi = \frac{d\eta}{d\varphi}.\frac{d\sigma}{r(\sigma)} = \frac{N.t}{2.\pi}.\frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$



$$\xi = \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$

$$\xi_1 = \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$

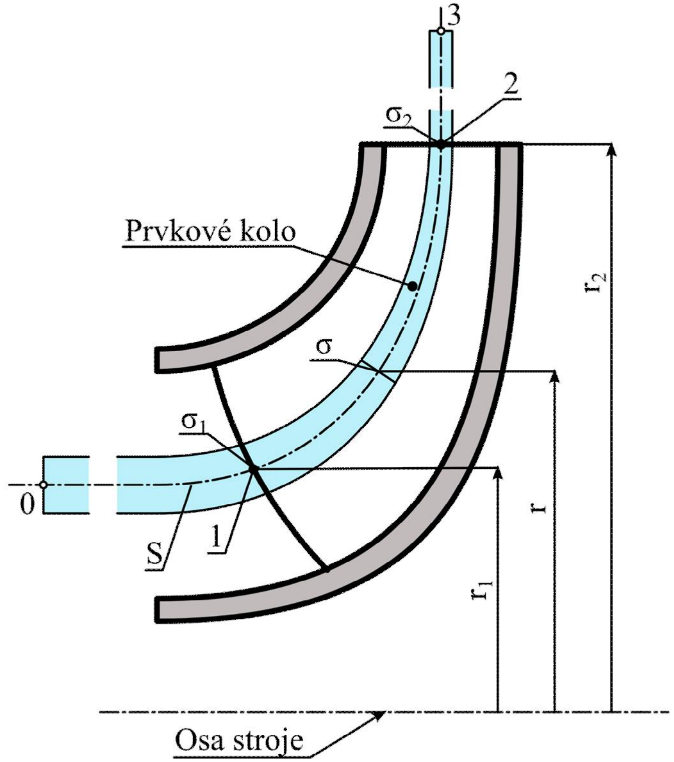
$$\xi - \xi_1 = \frac{N.t}{2.\pi}.\left(\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)} - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}\right) = \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$

Výsledný transformační vztah tedy je

$$\xi = \xi_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$

Obecná transformace radi-axíální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

$$\xi = \xi_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)} \qquad \xi_1 = -\frac{d}{2}$$



$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$

$$\xi_2 - \xi_1 = d = \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$

Označíme

$$a = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$

K tomu potřebujeme znát meridiální řez kolem

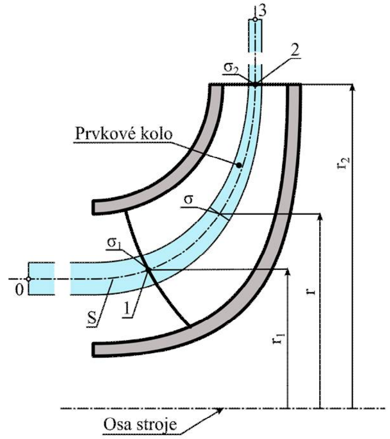
$$d = \frac{N.t}{2.\pi}.a \quad \Rightarrow \quad A = \frac{N.t}{2.\pi} = \frac{d}{a}$$

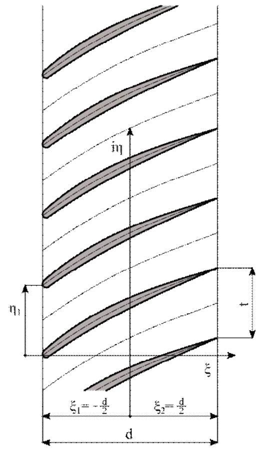
Obecná transformace radi-axiální profilové mříže na přímou mříž – geometrické vztahy

Shrnutí geometrických transformačních vztahů

$$\eta = \eta_1 + \frac{N.t}{2.\pi}.(\varphi - \varphi_1)$$

$$\xi = -\frac{d}{2} + \frac{N.t}{2.\pi}.\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)}$$





Nebo:

$$\eta = \eta_1 + \frac{d}{a}.(\varphi - \varphi_1)$$

$$\xi = -\frac{d}{2} + \frac{d}{a}.\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)} \quad = d\left(\frac{1}{a}.\int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{d\sigma}{r(\sigma)} - \frac{1}{2}\right)$$

Kde:

$$a = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r(\sigma)} \quad = d.\frac{2.\pi}{N.t}$$

Radiaxiální profilová mříž – kinematické vztahy

Opět se budeme snažit najít transformační vztahy pro rychlosti

Vzhledem k tomu, že se jedná o potenciální proudění tak můžeme rychlosti vyjádřit následujícím způsobem

$$v_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = v_\sigma.\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = v_\sigma.r.\frac{2.\pi}{N.t} = v_\sigma.r.\frac{a}{d} \qquad v_\sigma = v_\xi.\frac{1}{r}.\frac{d}{a}$$

$$v_\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{r.\partial \varphi}.\frac{r.\partial \varphi}{\partial \eta} = v_\varphi.r.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = v_\varphi.r.\frac{a}{d} \qquad v_\varphi = v_\eta.\frac{1}{r}.\frac{d}{a}$$

Obě složky se transformují stejným způsobem. To znamená, že můžeme psát.

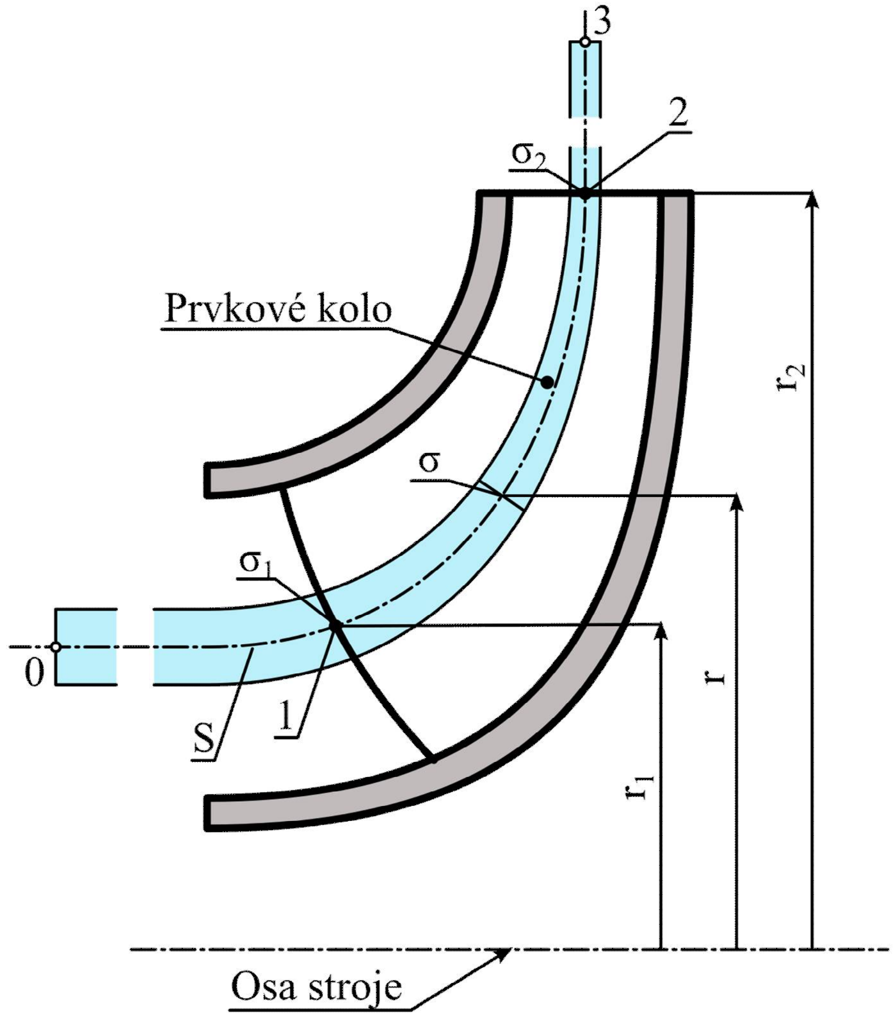
$$\left|v_\zeta\right| = |v_S|.r.\frac{a}{d} \qquad |v_S| = \left|v_\zeta\right|.\frac{1}{r}.\frac{d}{a}$$

Rychlostní trojúhelníky na obou plochách jsou si vzájemně podobné. Proto existují stejné transformační vztahy i pro unášivou a relativní rychlost.

$$\left|u_\zeta\right| = |u_S|.r.\frac{a}{d} \qquad |u_S| = \left|u_\zeta\right|.\frac{1}{r}.\frac{d}{a}$$

$$\left|w_\zeta\right| = |w_S|.r.\frac{a}{d} \qquad |w_S| = \left|w_\zeta\right|.\frac{1}{r}.\frac{d}{a}$$

Meridiální řez zadiaxiálním kolem



Nekonečná přímá profilová mříž